Mathematik der Oberstufe (0.6.2)

Michael 'ScriptKiller' Arndt

12.12.2002 - 23.01.2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

1.1 Gewährleistung

Alle Angaben, Rechnungen, Beweise und jeglicher Text sind ohne Gewähr!

Ich habe mich bemüht, möglichst keine Fehler zu machen, aber man kann ja nie wissen!

1.2 Copyright

Aktuelle Versionen sind zu beziehen auf http://scriptkiller.de/

1.3 Changelog

Version 0.1 15.12.2002, 21 Seiten, Erste Veröffentlichung

Version 0.2 30.12.2002, 34 Seiten, Neu: Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert bis Zusammenhänge Stetigkeit / Differenzierbarkeit, Essentials

Version 0.3 08.01.2003, 42 Seiten, Neu: Einige Graphen (Encapsulated Postscript)

Version 0.4 18.02.2003, 51 Seiten, Neu: Die Ableitungsfunktion, Potenregeln, Summenregel, Faktorregel, Ableitung von Sinus und Cosinus, Analyse einer Funktionenschar

Version 0.4.1 19.02.2003, 61 Seiten, Neu: Hinreichendes Kriterium für eine Extremstelle, Vereinfachung des Kriteriums.

Version 0.5 25.05.2004, 69 Seiten, Neu: Exponentialfunktion, e-Funktion, Logarithmusfunktion, Integrationsmethoden

Version 0.6 18.10.2004, 85 Seiten, Neu: Stochastik: Zufallsexperimente, mehrstufige Zufallsexperimente, Ereignisse, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeiten

Version 0.6.1 19.10.2004, 91 Seiten, Neu: Kombinatorik, Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette, Erwartungswert, diverse Beispiele, Differentialgleichungen, Bookmarks in PDF-Version

Version 0.6.2 23.01.2005, 95 Seiten, Neu: Standardabweichung, Beurteilende Statistik

Kapitel 2

Einleitung/Wiederholung

2.1 Analysis

Untersuchung (Analyse) von Funktionen und mathematische Beschreibung ihrer Eigenschaften.

2.2 Der Funktionsbegriff

2.2.1 Definition

Eine Zuordnung, die jedem $x \in \mathbb{D}_f$ **genau ein** $y \in \mathbb{W}_f$ zuordnet, heißt **Funktion**.

2.2.2 Beispiel

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{N}; \mathbb{W}_f = \mathbb{G}^+$$
$$f : x \mapsto y = 2x$$

eindeutige Relation/Zuordnung

$$\mathbb{D} = \mathbb{N}_0; \mathbb{W} = \mathbb{G}$$
$$x \mapsto y = \pm 2x$$

nicht eindeutige Zuordnung

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{Z}; \mathbb{W} = \{Quadratzahlen\}$$
$$f : x \mapsto y = x^2$$

eindeutige Relation

2.2.3 Veranschaulichung

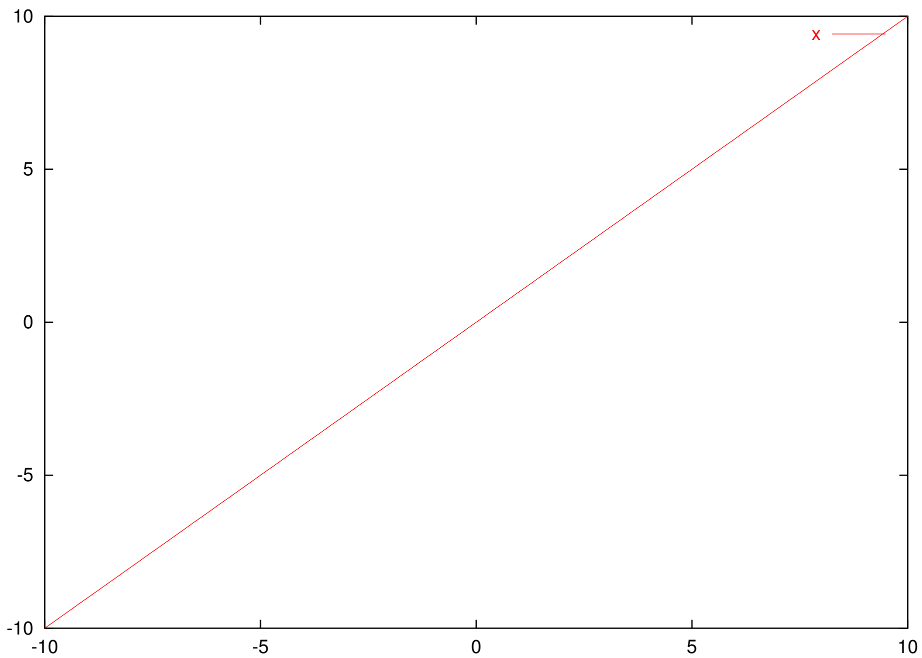
Funktionen können veranschaulicht werden in

1. einem Mengendiagramm
2. einer Wertetabelle
3. als Graph (Schaubild) im xy-Koordinatensystem

2.3 Die Lineare Funktion

$$f : x \mapsto mx + b; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; \mathbb{W}_f = \mathbb{R}\} Funktion$$

$$y = mx + b\} Funktionsgleichung$$



m heißt **Steigung** der Geraden
b heißt **y-Achensabschnitt** der Geraden

$m > 0$: f ist streng monoton steigend
$m < 0$: f ist streng monoton fallend

Es gilt:

$$\tan(x) = m = \frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_2}$$

Beispiel: Gerade durch $A(2|3)$ und $B(-3|7)$

$$m = \frac{7-3}{-3-2} = -\frac{4}{5}$$

oder:

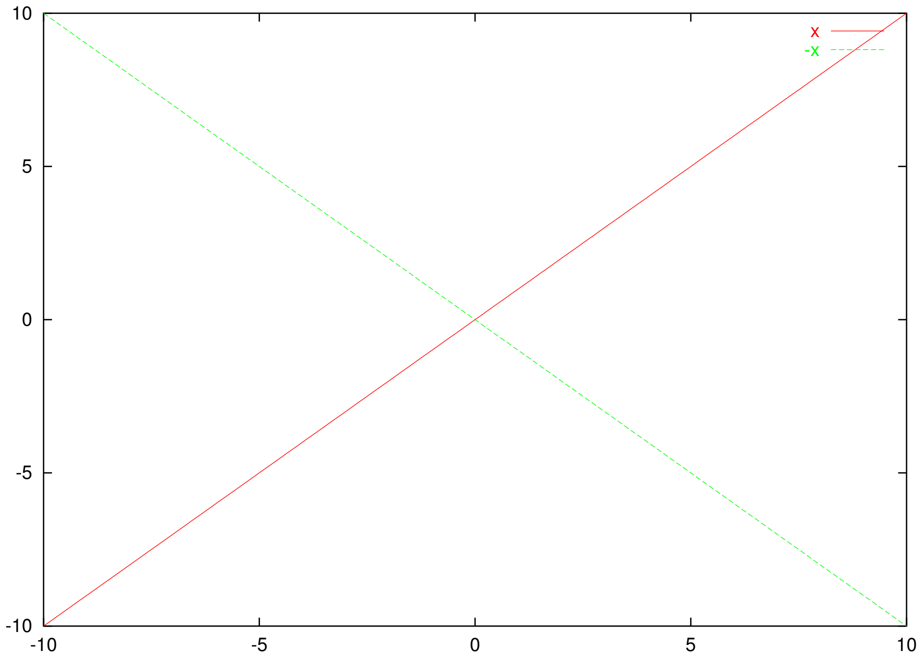
$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y = m(x - x_1) + y_1$$

(Punktsteigungsform der Geradengleichung)

$$y = mx + y_1 - mx_1$$
$$y = mx + b$$

(Normalform)

2.4 Orthogonale Geraden



Höhensatz:

$$h^2 = pq$$
$$1 = |m_g| \times |m_h|$$

1. $m_g > 0; m_h < 0 \Rightarrow m_g m_n = -1$
2. $m_g < 0; m_h > 0 \Rightarrow m_g m_n = -1$

$$\Rightarrow m_g m_h = -1$$

Allgemein:

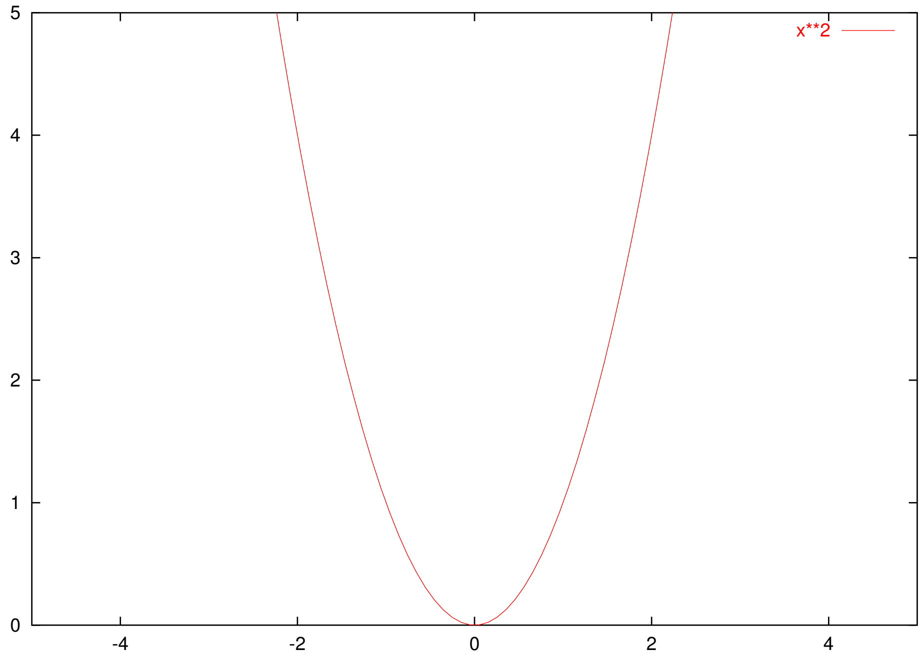
$$m_n = -\frac{a}{m_g}$$

2.5 Potenzfunktionen

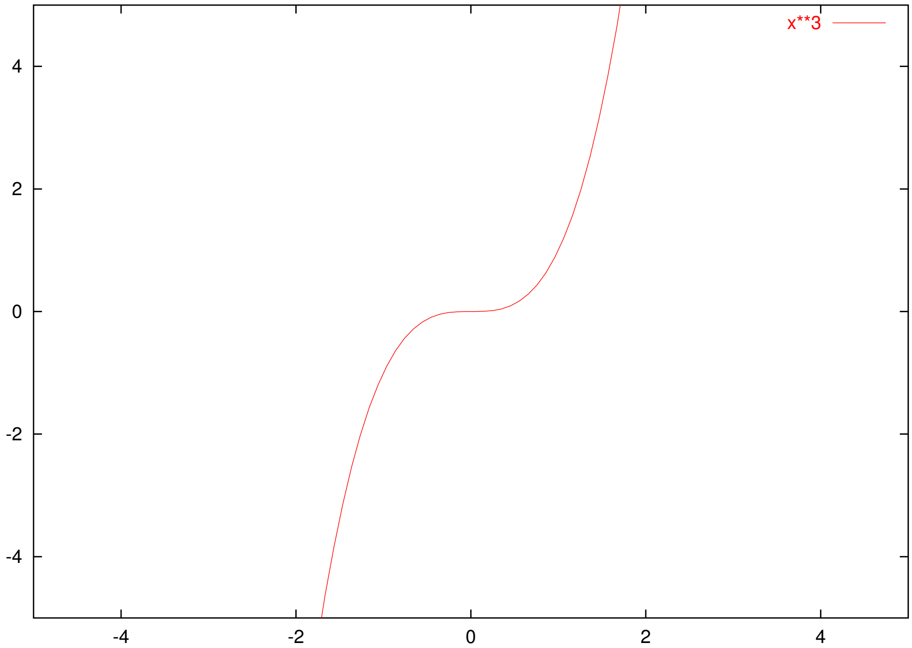
a)

$$f : x \mapsto x^n; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

n gerade: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$



n ungerade: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$



f hat eine Parabel der n-ten Ordnung als Graph.

b)

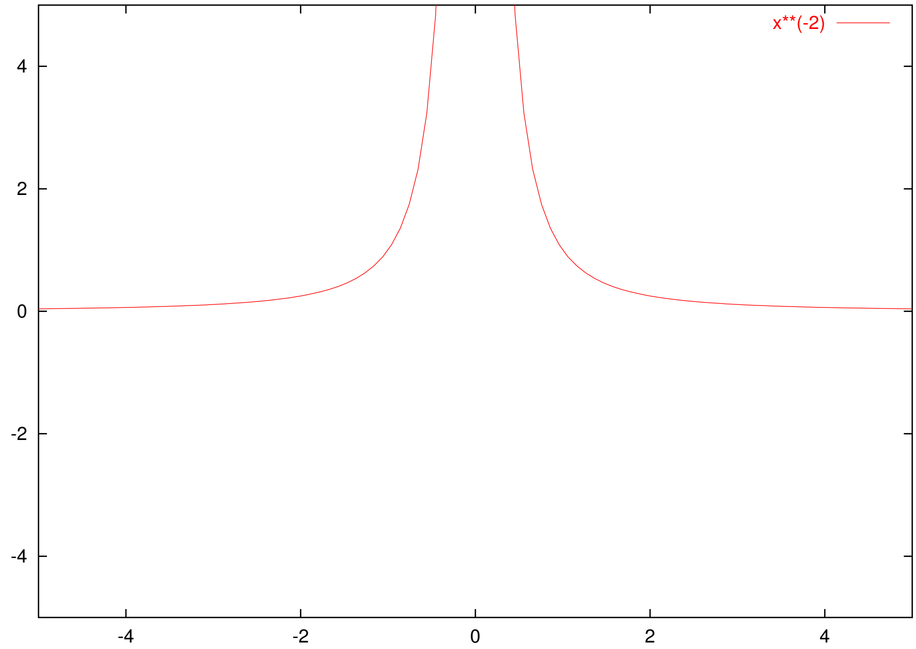
$$f : x \mapsto x^{-n}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$$

$$y = x^{-n}$$

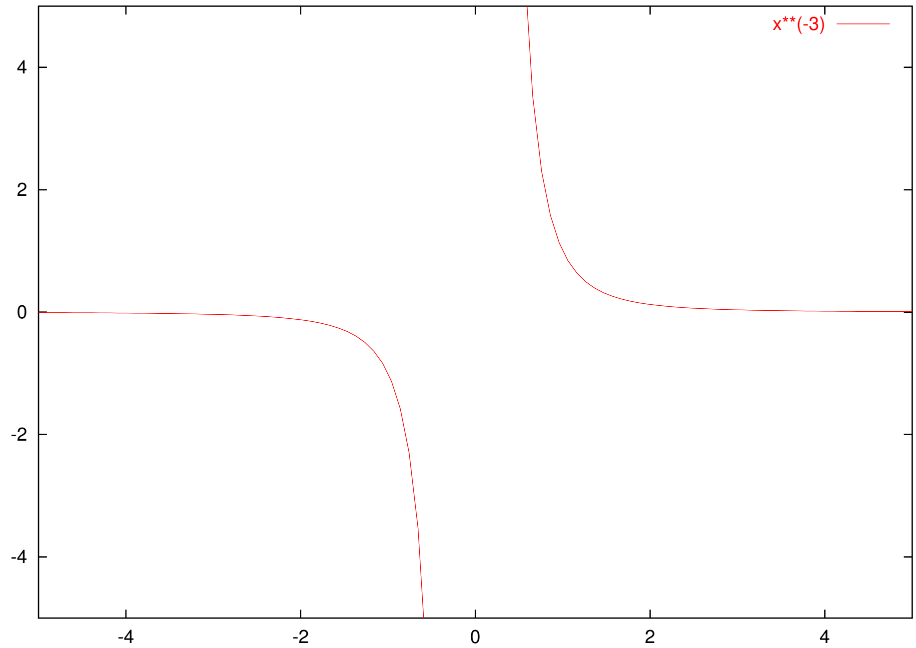
oder:

$$y = \frac{1}{x^n}$$

n gerade: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$



n ungerade: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

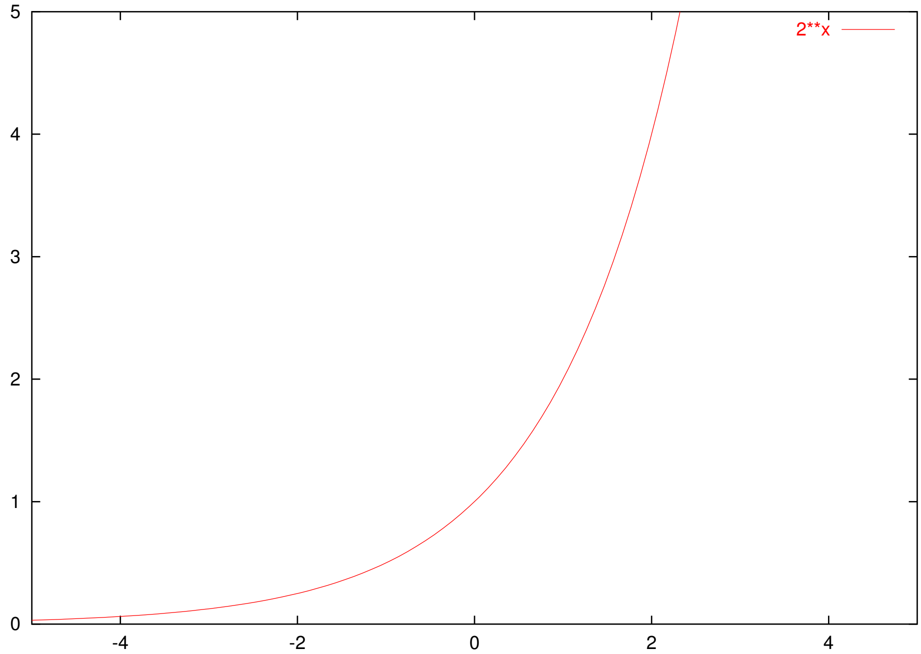


f hat eine Hyperbel n-ter Ordnung als Graph.

2.6 Exponentialfunktionen

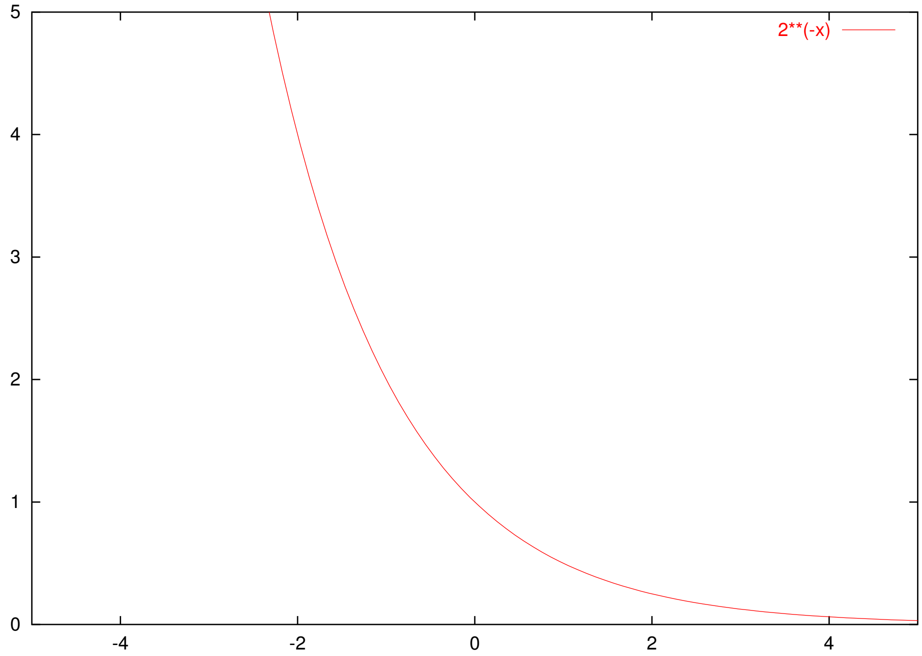
a)

$$f : x \mapsto a^x; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^+; \mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$$



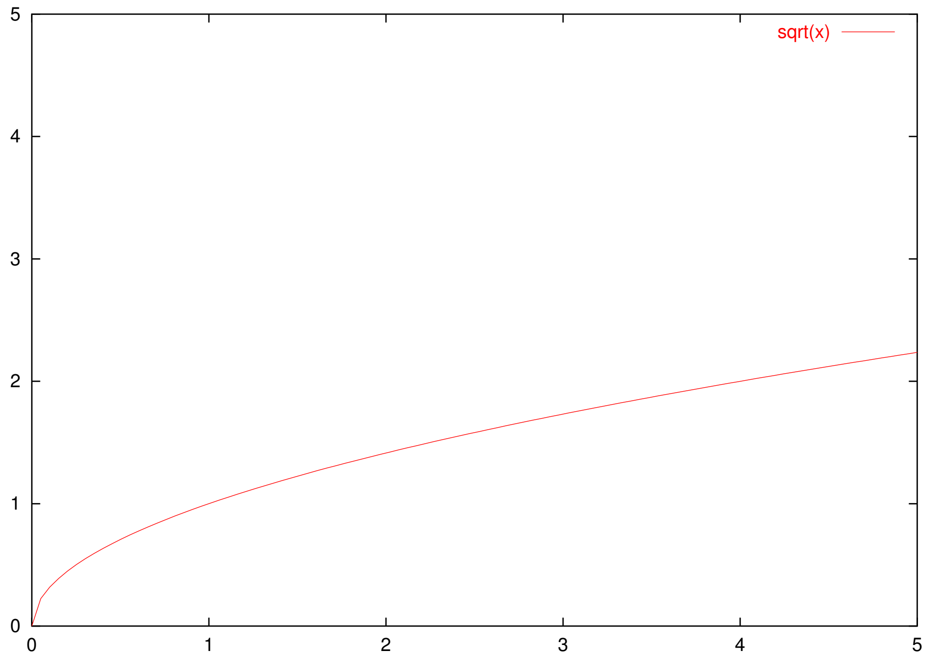
b)

$$f : x \mapsto a^{-x}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^+; \mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$$



2.7 Wurzelfunktionen

$$f : x \mapsto \sqrt[n]{x}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+; \mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$



Umkehrfunktion von:

$$f^{-1} : x \mapsto x^n$$

2.8 Der Weg von einer Funktion zur Umkehrfunktion

1. Beispiel:

$$f(x) = x^n; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+; \mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+; n \in \{geradeZahlen\}$$

1. Auflösen nach x

$$\begin{aligned} y &= x^n \\ x &= \sqrt[n]{y} \end{aligned}$$

2. Vertauschen der Variablen

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}; \mathbb{D}_{f^-} = \mathbb{R}_0^+; \mathbb{W}_{f^-} = \mathbb{R}_0^+;$$

Wertebereich der Funktion wird Definitionsbereich der Umkehrfunktion, Wertebereich der Umkehrfunktion neuer Definitionsbereich der Funktion.

Satz: Wenn eine Funktion streng monoton fallend (steigend) ist, dann ist sie umkehrbar.

2. Beispiel:

$$f : x \mapsto a^x; a \in \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; \mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+;$$

Nach x auflösen

$$\begin{aligned} y &= a^x \\ \log_a y &= \log_a (a^x) \\ \log_a y &= x \log_a (a) \\ \log_a y &= x \end{aligned}$$

Vertauschen der Variablen

$$y = log_a(x)$$

$$f^{-1} : x \mapsto \log_a (x); \mathbb{D}_{f^-} = \mathbb{R}^+; \mathbb{W}_{f^-} = \mathbb{R};$$

Kapitel 3

Zahlenfolgen

3.1 Einführung

Vereinfachung $\mathbb{D}_f = \mathbb{N}$

Beispiel

$$f : x \mapsto 2x; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f : n \mapsto 2n; \mathbb{D}_f = \mathbb{N}$$

Wertetabelle

n	2n
1	2
2	4
3	6
4	8

Bei der Beschränkung auf $\mathbb{W}_f = \mathbb{N}$ lassen sich die Funktionswerte übersichtlich und lückenlos in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen anordnen und beobachten.

Deshalb gibt man diesen Funktionen mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{N}$ die Bezeichnung Zahlenfolge oder kurz: Folge.

3.2 Folge

Man schreibt $f(n) = a_n$
$a_1; a_2; a_3; a_4; ...a_{n-1}; a_n; a_{n+1}; ...$ sind die **Glieder** der Folge.

Eine Folge ist eine **unendliche**, **geordnete** Menge.

Man schreibt:

$$(a_n) = \{a_1; a_2; a_3; ...\}$$

3.3 Beispiele

1. $(a_n) = \{1; 3; 5; 7; 9; ...\}$
   d.h. $a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 5; ...$

   a) Allgemeines Bildungsgesetz der Folgenglieder: $a_n = 2n - 1; n \in \mathbb{N}$
   Explizite Form des Bildungsgesetzes.

   b) **Rekursive Form** des Bildungsgesetzes: $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 2; n \in \mathbb{N}$
   Vorsicht: Die rekursive Form benötigt stest ein Startglied a_1!

2. $(b_n) = \{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; ...\}$

   explizit: $b_n = \frac{n}{n+1}$
   rekursiv: $b_1 = \frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

3. $(c_n) = \{2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; ...\}$

   explizit: $c_n = \frac{n+1}{n}$
   rekursiv: $c_1 = 2$;

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n + \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} \\ &= c_n - \frac{1}{n^2 + n} \end{aligned}$$

4. $(d_n) = \{4; 1; 0; 1; 4; 9; ...\}$

   explizit: $d_n = (n-3)^2$

Die Folge (a_n) und die Folge (b_n) sind **streng monoton steigend**.

3.4 Differenzkriterium der Monotonie

(a_n)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (2n+1) - (2n-1) \\ &= 2n + 1 - 2n + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$2 > 0 \Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton steigend.

(b_n)

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

$\frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ für **alle** $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (b_n)$ ist streng monoton steigend.

(c_n)

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} \\ &= -\frac{1}{n^2 + n} \end{aligned}$$

$\frac{1}{n^2+n} < 0$ für **alle** $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (c_n)$ ist streng monoton fallend.

3.5 Vorübung zur ε-Umgebung

Folge: $(d_n) = (n-3)^2$

Monotonieuntersuchung

Differenzkriterium

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= (n-2)^2 - (n-3)^2 \\ &= n^2 - 4n + 4 - n^2 + 6n - 9 \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Fallunterscheidung

1.

$$\begin{aligned} 2n - 5 &> 0 \\ n &> \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für $n > 2.5$ ist (d_n) streng monoton steigend.

2.

$$\begin{aligned} 2n - 5 &< 0 \\ n &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für $n < 2.5$ $(n = 1; n = 2)$ ist (d_n) streng monoton fallend.

(d_n) steigt unbegrenzt an, ab welcher Platzziffer n_0 sind die Folgenglieder größer als 10000?

$$\begin{aligned} d_n &> 10000 \\ (n-3)^2 &> 10000 \\ n &> \sqrt{10000} + 3 \\ |n-3| &> 100 \end{aligned}$$

1. Fall $n > 3$

$$\begin{aligned} n - 3 &> 100 \\ n &> 103 \end{aligned}$$

2. Fall $n < 3$

$$\begin{aligned} -(n-3) &> 100 \\ n - 3 &< -100 \\ n &< -97 \end{aligned}$$

2. Fall unlösbar für $n \in \mathbb{N}$!
$\Rightarrow d_n > 10000$ für alle $n \geq 104$.
Wenn (a_n) unbeschränkt, dann (a_n) streng monoton.

(a_n) unb. $\Longrightarrow$ (a_n) mon.

Folge: $(b_n) = \frac{n}{n+1}$

Die Folge (b_n) steigt streng monoton und trotzdem steigt sie nicht unbegrenzt an. Sie scheint sich der Zahl 1 "anzunähern".

Man sagt: Die Folge (b_n) hat den **Grenzwert** 1.

Dieser Wert wird von den Folgendgliedern **beliebig** angenähert, d.h. der **Abstand der Folgendglieder zum Grenzwert 1** unterschreitet jede noch so kleine positive Zahl.

Ab welcher Platzziffer n_0 ist der Abstand der Folgenglieder kleiner als $\frac{1}{10000} = 10^{-4}$?

$$
\begin{aligned}
|b_n - 1| &< 10^{-4} \\
|\frac{n}{n+1} - 1| &< 10^{-4} \\
|\frac{n-n-1}{n+1}| &< 10^{-4} \\
|-\frac{1}{n+1}| &< 10^{-4}
\end{aligned}
$$

bei n $\in \mathbb{N}$ ist $-\frac{1}{n+1}$ immer negativ!

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} &< 10^{-4} \\
1 &< (n+1)10^{-4} \\
\frac{1-10^{-4}}{10^{-4}} &< n \\
n &> 0.9999 \times 10^4 \\
n &> 9999 \\
\Rightarrow n_0 &= 10000
\end{aligned}
$$

Für alle $n \geq n_0 = 10000$ ist der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert 1 kleiner als 10^{-4}!

Verallgemeinerung $(c_n) = \frac{n+1}{n}$ und $\varepsilon > 0$ seien vorgegeben

$$
\begin{aligned}
|c_n - 1| &< \varepsilon \\
|\frac{n+1}{n} - 1| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< n \\
n &> \varepsilon^{-1}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Für alle $n > n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ gilt: $|c_n - 1| < \varepsilon$.

3.6 Der Grenzwert einer Folge

3.6.1 Beispiel

$a_n = 20 \times (-0.8)^{n-1}; n \in \mathbb{N}$

In jeder ε-Umgebung der Zahl 0 liegen **"fast alle"** Folgenglieder d.h. aller außer endlich vielen Gliedern.

3.6.2 Definition

Unter der ε-Umgebung einer Zahl g versteht man ein nach beiden Seiten offenes Intervall mit dem Mittelpunkt g und der Länge 2ε.

$$U_\varepsilon(g) =]g - \varepsilon; g + \varepsilon[$$
$$U_\varepsilon(g) = \{x | g - \varepsilon < x < g + \varepsilon\}$$

3.6.3 Beispiele

$$U_{\frac{1}{10}}(3) =]2.9; 3.1[= \{x | 2.9 < x < 3.1\}$$
$$U_{\frac{1}{100}}(-2) =]-2.01; -1.99[= \{x | -2.01 < x < 1.99\}$$

3.6.4 Anwendung

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Die Folge scheint den Grenzwert $g = 2$ zu haben.

Nachweis $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben; liegen in der Umgebung $U_\varepsilon(2)$ fast alle Folgenglieder?

$$\begin{aligned} |a_n - g| &< \varepsilon \\ |2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 2| &< \varepsilon \\ |\frac{(-1)^{n+1}}{n}| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Platzziffer n_0, so dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n > n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ d.h. alle Folgenglieder a_n für $n > n_0$ liegen in $U_\varepsilon(2)$.

3.6.5 Definition Grenzwert

Eine Folge (a_n) hat den Grenzwert g, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

Eine Folge mit Grenzwert heißt **konvergente** Folge. Eine Folge ohne Grenzwert heißt **divergente** Folge.

Hat eine konvergente Folge den Grenzwert g, dann schreibt man symbolhaft:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = g$$

Man liest: "Limes a_n für n gegen ∞ gleich g"

3.7 Grenzwertsätze

3.7.1 Sammlung einfacher konvergenter Folgen

1. $$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0$$

2. $$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}) = 0$$

3. $$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$$

4. $$\lim_{n\to\infty}(q^n) = 0; |q| < 1$$

5. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1; a > 0$$

6. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = 1$$

7. $$\lim_{n\to\infty}(a + \frac{1}{n}) = a$$

3.7.2 Sätze

Die Folge (a_n) konvergiere gegen a und (b_n) konvergiere gegen b. Dann gilt:

a) $(a_n \pm b_n)$ konvergiert gegen $a \pm b$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \times \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)}$$

3.8 Die Ulam-Folge

$a_1 = m; m, n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} = \{\frac{a_n}{2}; a_n$ gerade
$a_{n+1} = \{3a_n + 1; a_n$ ungerade

3.9 Geometrische Folge

explizit $a_n = aq^{n-1}; a \neq 0; q \neq 0; n \in \mathbb{N}$

rekursiv $a_1 = a; a_{n+1} = a_n q; aq \neq 0; n \in \mathbb{N}$

Kapitel 4

Funktionen

4.1 Grenzwerte bei Funktionen

4.1.1 Folgen und Funktionen

Folgen sind Funktionen mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{N}$.

z.B. $(a_n) = \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}$
d.h. $f : h \mapsto \frac{n}{n+1}; \mathbb{D}_f = \mathbb{N}$

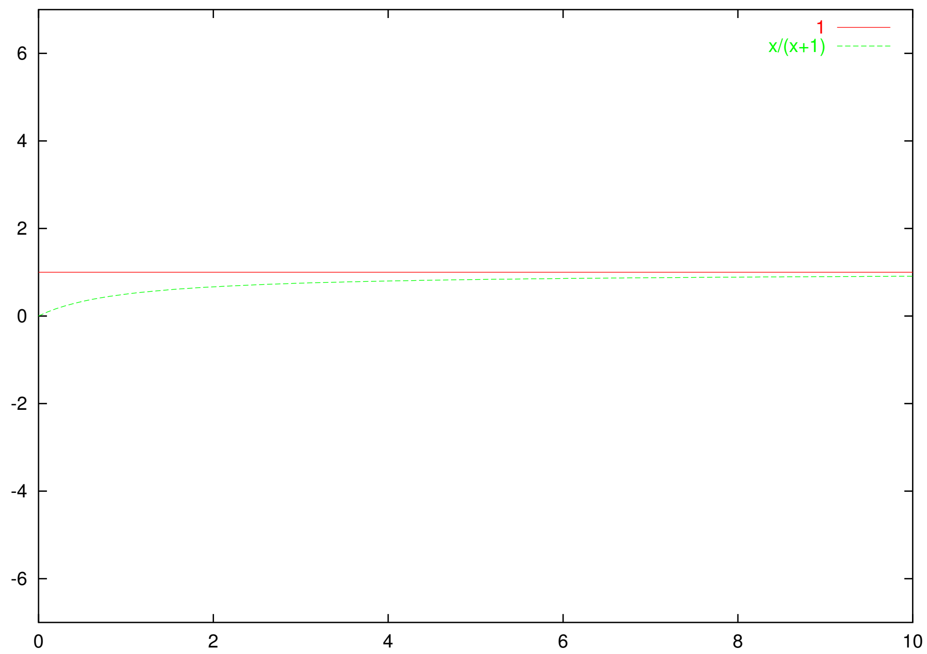
Wir wissen bereits: $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 1$

Erweitern des Definitionsbereiches in einem ersten Schritt auf $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$:

$$\Rightarrow f : x \mapsto \frac{x}{x+1}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$$

x kann hier in einer beliebigen Art u. Weise unbegrenzt enwachsen.

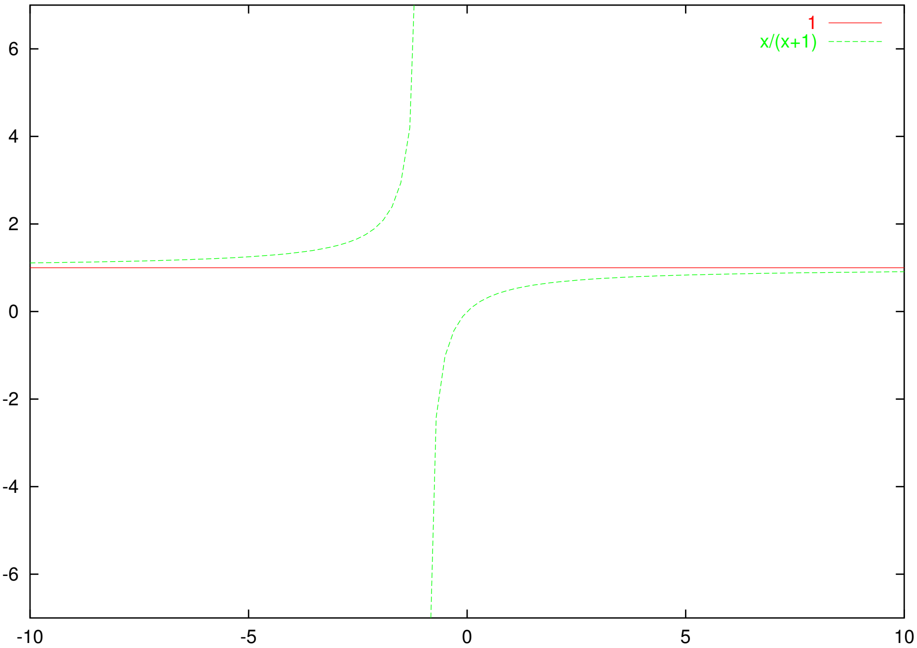
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1}) = 1$$



Erneutes Erweitern des Definitionsbereiches in einem zweiten Schritt auf $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f : x \mapsto \frac{x}{x+1}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

f hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine **Definitionslücke**.



Was geschieht für $x \to -\infty$?

Vorsichtshalber beschränken wir uns auf die Betrachtung für alle $x < -1$!

Anschaulich:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 1$$

Rechnerisch:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right) &= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-x}{-x+1}\right) \\ &= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = 1 \end{aligned}$$

4.1.2 Asymptoten

Anschaulich: Nähert sich der Graph einer Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$ einer Geraden, so heißt diese Gerade **Asymptote des Graphen von** f.

Analytisch: Nähern sich die Werte einer Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$ beliebig einer Zahl a, so heißt diese Zahl **Grenzwert der Funktion** f für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$.

4.1.3 Einfache Grenzwerte

1. $$\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{c}{x}) = 0; c \in \mathbb{R}$$

2. $$\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{c}{x^2}) = 0; c \in \mathbb{R}$$

3. $$\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{c}{x+k}) = 0; c, k \in \mathbb{R}$$

In all diesen Fällen ist die x-Achse waagrechte Asymptote der Funktionsgraphen.

1. $$\lim_{x\to\pm\infty}(c) = c; c \in \mathbb{R}$$

4.1.4 Schiefe Asymptoten

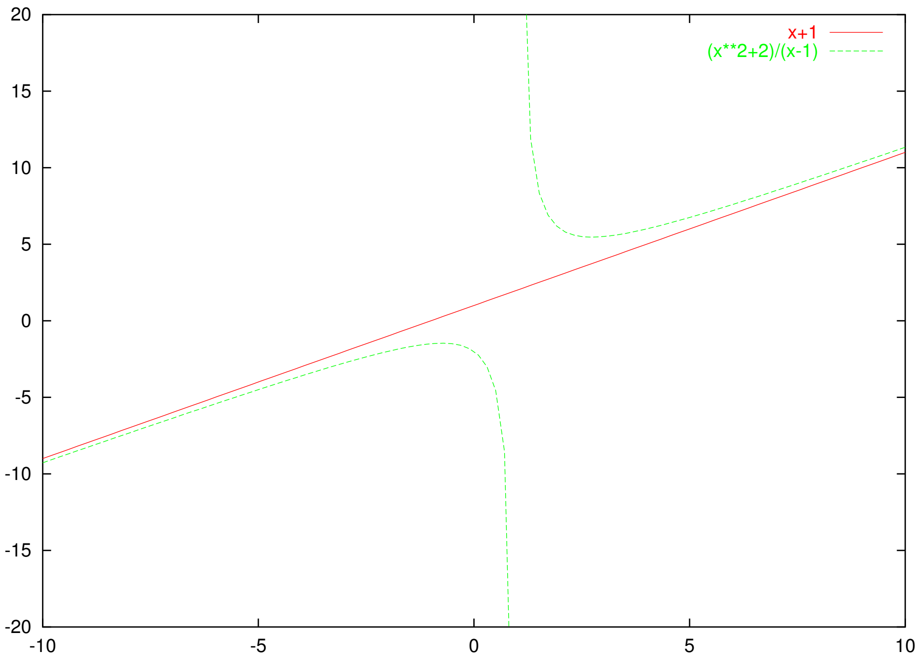
Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ ex. nicht

Polynomdivision

$$(x^2+2) : (x-1) = x + 1 + \frac{3}{x-1}$$



Für sehr große x gilt:

$$f(x) \approx x + 1$$

d.h. für $x \to \infty$ nähert sich der Graph von f der Geraden $y = x + 1$ beliebig an.

$\Rightarrow y = x + 1$ ist die Funktionsgleichung einer sogenannten **schiefen Asymptote**.

4.2 Der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle x_0

4.2.1 Stetigkeit

1.

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

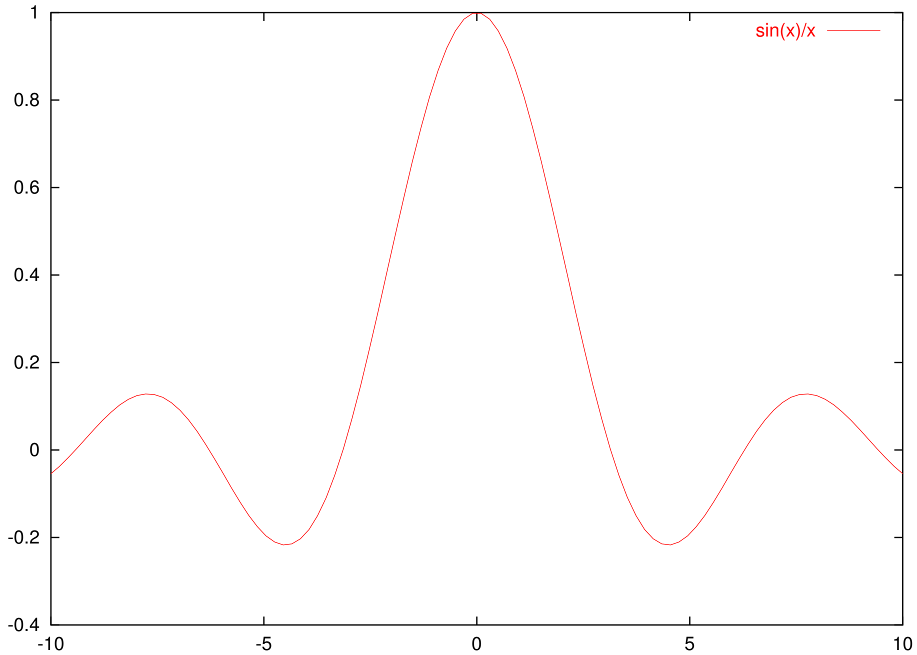
$$\Rightarrow f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

f hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine **Definitionslücke**. Hat Graph f fort eine senkrechte Asymptote?

Wertetabelle

x	$\frac{\sin(x)}{x}$
$\pm\pi$	0

± 2.5	0.239
± 2	0.455
± 1	0.841
± 0.5	0.960
± 0.25	0.990
± 0.1	0.998



Ergebnis

$$\lim_{x \to 0; x > 0} (\frac{\sin(x)}{x}) = 1$$

rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \to 0; x < 0} (\frac{\sin(x)}{x}) = 1$$

linksseitiger Grenzwert

Mit Hilfe diser beiden Eigenschaften kann man ganz bequem und elegant eine neue, lückenlose Funktion basteln, deren Graph an der Stelle $x_0 = 0$ nicht unterbrochen ist, sondern durchgezeichnet werden kann.

$$g(x) = \{\frac{\sin(x)}{x}; x \neq 0$$

$$g(x) = \{1; x = 0$$

Anschaulich: Man kann den Graphen von g ohne Absetzen durchzeichnen.

Man sagt: Wir haben $f(x)$ an der Stelle x_0 **stetig fortgesetzt**.

$g(x)$ ist eine **abschnittsweise definierte Funktion**.

4.2.2 Definition Stetigkeit

Wann ist eine Funktion an der Stelle x_0 stetig?

Anschaulich $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der Graph von f über die Stelle x_0 hinweg ohne Absetzen gezeichnet werden kann.

Analytisch Eine Funktion f mit $f : x \mapsto f(x); x \in \mathbb{D}_f$ heißt **stetig an einer Stelle** x_o, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0; x > x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0; x < x_0} f(x) = f(x_0)$$

4.2.3 Sprungstellen

Beispiel

$$f(x) = \{\frac{1}{2}x; x < 2$$
$$f(x) = \{-x + 4; x > 2$$

$$\lim_{x \to 2; x < 2} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to 2; x > 2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2; x < 2} f(x) \neq \lim_{x \to 2; x > 2} f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ **nicht stetig fortsetzbar**!

$f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ fortsetzbar, kann aber damit nie stetig werde an der dieser Stelle.

z.B.

$$g(x) = \{\frac{1}{2}x; x < 2$$
$$g(x) = \{1; x = 2$$
$$g(x) = \{-x + 4; x > 2$$

$g(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine **endliche Sprungstelle**.

Beispiel

$$f(x) = \{\frac{1}{2}x; x < 2$$

$$f(x) = \{\frac{1}{x-2}; x > 2$$

$\lim_{x\to 2; x<2} f(x) = 1$
$\lim_{x\to 2; x>2} f(x)$ existiert nicht

$\Rightarrow f(x)$ **nicht stetig fortsetzbar** an der Stelle $x_o = 2$.
$f(x)$ ist aber fortsetzbar z.B.

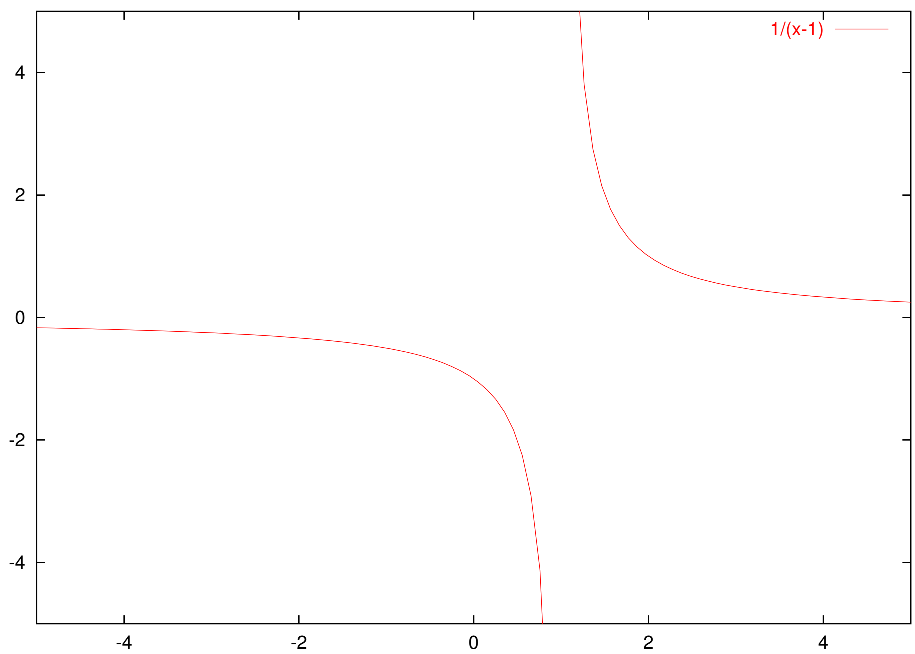
$$g(x) = \{\frac{1}{2}x; x < 2$$

$$g(x) = \{1; x = 2$$

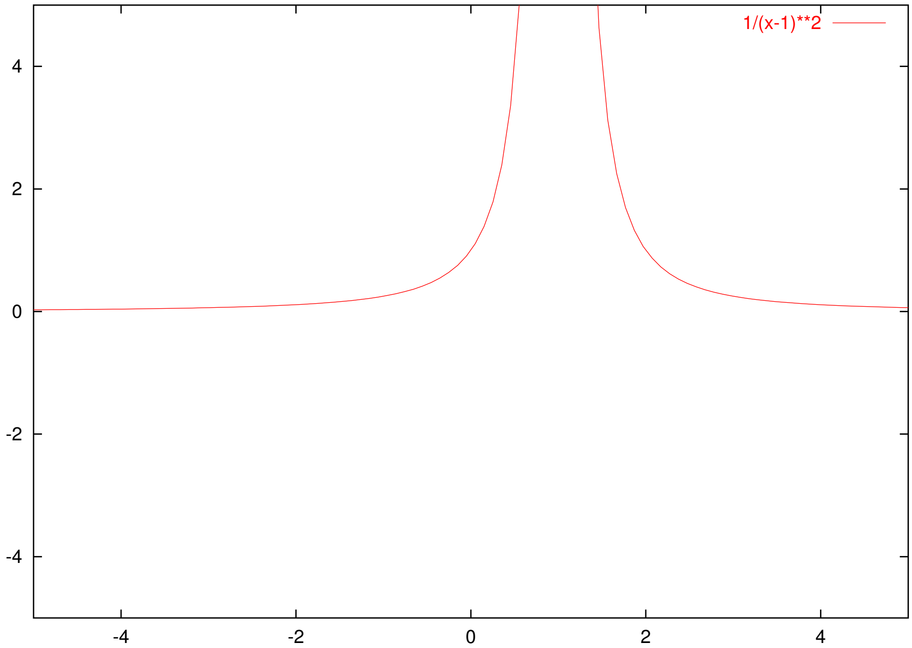
$$g(x) = \{\frac{1}{x-2}; x > 2$$

$g(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine **unendliche Sprungstelle**.

4.3 Pole mit und ohne Vorzeichenwechseln



Die Stelle $x_0 = 1$ ist ein Pol **mit Vorzeichenwechsel**.



Die Stelle $x_0 = 1$ ist ein Pol **ohne Vorzeichenwechsel**.

4.4 Funktionenscharen

Funktion

$$f(x) = \{x + 1; x < 0$$
$$f(x) = \{x^2 + t; x \geq 0$$

$s(x) = x^2 + t$ ist die Gleichung einer **Funktionenschar** s, t heißt **Scharparameter**.

Stetigkeitsuntersuchung

$$\lim_{x \to 0; x<0} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to 0; x>0} f(x) = t$$
$$f(x) = t$$

Damit f an der Stelle $x_o = 0$ stetig ist, muss gelten:

$$1 = t = t$$

$$\Rightarrow t = 1$$

4.5 Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert

4.5.1 Behauptung

Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

4.5.2 Beispiel

$$a_n = (-1)^n * (1 + \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}$$

n gerade: $a_2 = \frac{3}{2}; a_4 = \frac{5}{4}; ... \to 1$ für $n \to \infty$ n ungerade: $a_! = -2; a_3 = -\frac{4}{3}; a_5 = -\frac{6}{5}; ... \to -1$ für $n \to \infty$

4.5.3 Voraussetzung

Definition des Grenzwertes

4.5.4 Behauptung

Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert

4.5.5 Beweis (indirekt)

Annahme Eine Folge hat zwei oder mehr Grenzwerte g_1 und g_2, ... **sei richtig**!

$\Rightarrow$ In jeder ε-Umgebung U_1 von g_1 liegen unendlich viele Glieder der Folge und außerhalb **endlich viele**.

$\Rightarrow$ In jeder ε-Umgebung U_2 von g_2 liegen ebenfalls unendlich viele und außerhalb **endlich viele**.

$\Rightarrow$ Für $0 < \varepsilon < |g_2 - g_1|$ liegen außerhalb von U_1 (und auch von U_2) **unendlich viele** Glieder!

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Vorraussetzung!

$\Rightarrow$ Annahme ist falsch

$\Rightarrow$ Behauptung ist richtig

4.6 Schnittpunkte des Graphen einer Funktion mit den Koordinatenachsen

4.6.1 1. Beispiel

Berechne die Schnittpunkte der Geraden mit der Funktionsgleichung $f(x) = 5x - 2$ mit den Koordinatenachsen.

1. Für den Schnittpunkt mit Y-Achse gilt:

$$\mathbf{x_S = 0} : y_S = 5 * 0 - 2 = -2$$

2. Für den Schnittpunkt mit X-Achse gilt:

$$\mathbf{f(x_N) = 0} : 5 * x_N - 2 = 0 \Rightarrow x_N = \frac{2}{5}$$

4.6.2 2. Beispiel

$$f : x \mapsto x^2 + \sqrt{2} * x - 4; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

1. Schnittpunkt S mit der Y-Achse Notwendige und hinreichende Bedinung:

$$x_S = 0 : 0^2 + \sqrt{2} * 0 - 4 = Y_S \Rightarrow y_S = -4 \Rightarrow S(0| - 4)$$

2. Nullstellen Notwendig und hinreichend:

$$\begin{aligned} f(x_N) = 0 : x_N^2 + \sqrt{2} * x_N - 4 &= 0 \\ x_{N_{1,2}} &= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 16}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \\ x_{N_1} &= \sqrt{2} \\ x_{N_2} &= -2\sqrt{2} \\ \Rightarrow N_1(\sqrt{2}|0); N_2(-2\sqrt{2}|0) \end{aligned}$$

4.7 Vorübung zum Tangentenproblem

4.7.1 Gleichförmige Bewegung

Der Körper legt in gleichen Zeitabschnitten stets gleiche Wegabschnitte zurück.

Zurückgelegter Weg: $s(t)$ (von t abhängige Variable)
Benötigte Zeit: t (unabhängige Variable)

Wir untersuchen:

$$f : t \mapsto s(t); t \in \mathbb{R}_0^+$$

$$v = \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$$

"Differenzenquotient"

$$s(t) = v * t + s_0$$

4.7.2 Beschleunigte Bewegung

Beim Vorgang einer Bremsung ändert sich die Geschwindigkeit. Da v nun nicht mehr const. ist kann man zu jedem Augenblick nur noch von einer Momantangeschwindigkeit reden, die nun aber nicht mehr als Differenzenquotient darstellbar ist.

Es gelte:

$$s(t) = k * t^2; k > 0$$

$$\overline{v} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

ist eine "mittlere Geschwindigkeit" zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1.
$\overline{v}$ ist die Steigung der Sekanten P_0P_1.

$$\overline{v}(t_1) = \frac{kt_1^2 - kt_0^2}{t_1 - t_0}; t_1 \neq t_0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} v_m &= \lim_{t_1 \to t_0} \overline{v}(t_1) \\ &= \lim_{t_1 \to t_0} \frac{k(t_1 - t_0)(t_1 + t_0)}{t_1 - t_0} \\ &= \lim_{t_1 \to t_0} k(t_1 + t_0) = 2kt_0 \end{aligned}$$

$v_m = 2kt_0$ ist die gesuchte Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

$$v_m = \lim_{t \to t_0} \overline{v}(t)$$

Die Momentangeschwindigkeit v_m ist die Steigung der Tangente im Graph im Punkt P_0.

4.7.3 Definition

Unter der **Steigung einer Kurve** im Kurvenpunkt P_0 versteht man die **Steigung der Tangente** im Punkt P_0.

4.8 Verallgemeinerung des Tangentenproblems

4.8.1 Geschwindigkeiten

$$s : t \mapsto s(t); t \in [a; b]$$

$\Rightarrow$ Mittlere Geschwindigkeit zwischen t und t_0:

$$\overline{v}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

$\Rightarrow$ Momentangeschwindigkeit an der Stelle t_0:

$$v_m(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Steigung der Tangente in $P_0(t_0|s(t_0))$ oder **Steigung der Kurve** in P_0

4.8.2 Verallgemeinerung

$$f : x \mapsto f(x); x \in [a; b]$$

$\Rightarrow$ Mittlere Steigung zwischen x und x_0 (**Sekantensteigung**):

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{t - t_0}$$

Differenzenquotient
$\Rightarrow$ **Steigung der Tangente** in $P_0(x_0|f(x_0))$:

$$m_t(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differentialquotient
Man sagt: $m_t(x_0)$ ist die sog. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0.
Man schreibt: $m_t(x_0) = f'(x_0)$ "f-Strich von x_0".

4.9 Berechnung einer Ableitung nach der h-Methode

4.9.1 Methode

$$g_r = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f(x_0 + h) - f(x_0)}}{\mathbf{h}}$$

$$g_l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f(x_0 - h) - f(x_0)}}{\mathbf{-h}}$$

Falls $g_r = g_l$, gilt: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 \pm h) - f(x_0)}{\pm h}$

4.9.2 Beispiel

$$f(x) = 3x^2$$

1. Rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} g_r = \lim_{h\to 0} \frac{3(x_0+h)^2 - 3x_0^2}{+h} \\ = \lim_{h\to 0} 6x_0 + 3h \\ = 6x_0 \end{aligned}$$

2. Linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} g_l = \lim_{h\to 0} \frac{-6x_0h + 3h^2}{-h} \\ = \lim_{h\to 0} 6x_0 - 3h \\ = 6x_0 \end{aligned}$$

4.10 Die Tangente t an dem Graph einer Funktion f

4.10.1 Ableitung

1. Wir bestimmen die Tangente im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$:

$$m_t = f'(x_0)$$

Damit kennen wir **einen Punkt** P_0 und die **"Richtung"** (Steigung) der gesuchten Tangente.

2. Wie bestimmen wir die Funktionsvorschrift für t?

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{t(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ f'(x_0)(x - x_0) = t(x) - f(x_0) \\ \mathbf{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = t(x)} \\ t(x) = f'(x_0) * x - f'(x_0) * x_0 + f(x_0) \end{aligned}$$

⇒ Funktionsgleichung der Tangente im Punkt P_0:

$$\begin{aligned} t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

4.10.2 Beispiel

$$f : x \mapsto 3x^2 + 1; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Bestimme die Tangentengleichung im Punkt $P_0(\frac{1}{2}|?)$

$$\begin{aligned}
1.f(x_0) &= 1\frac{3}{4} \Rightarrow P_0(\frac{1}{2}|1\frac{3}{4}) \\
2.f(\frac{1}{2}) &= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{-1\frac{3}{4} + 3x^2 + 1}{x - \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \to \frac{1}{2}} 3x + \frac{3}{2} \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t(x) &= f'(\frac{1}{2}) * x - f'(\frac{1}{2}) * \frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} \\
t(x) &= 3x + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

4.11 Gleichung der Normalen

4.11.1 1. Gleichung der Tangente

$$t : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

4.11.2 2. Gleichung der Normalen

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$n : y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

4.12 Die Differenzierbarkeit einer Funktion

4.12.1 Aufgabe

$$f : x \mapsto \{x^2; x \leq 1$$
$$f : x \mapsto \{\sqrt{x}; x > 1$$

4.12.2 Ist f an der Stelle $x_0 = 1$ stetig?

$$\lim_{x\to 1; x<1} x^2 = 1$$
$$\lim_{x\to 1; x>1} \sqrt{x} = 1$$
$$f(1) = 1$$

$\Rightarrow f$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ stetig

4.12.3 Welche Ableitung hat f an der Stelle $x_0 = 1$?

$$\begin{aligned} g_l = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \\ = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)^2 - 1}{-h} \\ = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 2h}{-h} \\ = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_r = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \\ = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} \\ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$g_l \neq g_r \Rightarrow f'(1)$ existiert **nicht**!
$\Rightarrow$ f ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht differenzierbar.
Anschaulich bedeutet das: Graph f hat an der Stelle $x_0 = 1$ einen Knick.

4.12.4 Weiteres Beispiel

$$f : x \mapsto \{\frac{1}{4}x^2; x \leq 2$$
$$f : x \mapsto \{\frac{1}{4}x^2 + 1; x > 2$$

1. Stetigkeit f ist unstetig an der Stelle $x_0 = 2$, da

$$\lim_{x\to 2; x<2} f(x) = 1; \lim_{x\to 2; x>2} f(x) = 2; f(x) = 1$$

2. Ableitung

$$g_l = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}(2-h)^2 - \frac{1}{4} * 2^2}{-h} \\ = 1$$

$$g_r = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}(2+h)^2 + 1 - \frac{1}{4} * 2^2}{h} \\ = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h} + 1 + \frac{1}{4}h)$$

existiert nicht, da $\frac{1}{f} \to \infty$

$g_l \neq g_r \Rightarrow f$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar.

4.12.5 Definition

Eine Funktion f sei in $\mathbb{D}_f = [a; b]$ definiert. f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in]a; b[$, wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

4.12.6 Zusammenfassung

1. Sprungstelle x_0 (unstetig an der Stelle $x_0 \Rightarrow f$ nicht differenzierbar an der Stelle x_0

2. f stetig an der Stelle x_0, jedoch mit "Knick" $\Rightarrow f$ nicht differenzierbar an der Stelle x_0

3. f stetig an der Stelle x_0 und "glatt" $\Rightarrow f$ ist differenzierbar an der Stelle x_0

1. Ergebnis Ist f an der Stelle x_0 stetig, dann ist nicht sicher, ob f dort auch differenzierbar ist.

Stetigkeit $\not\Rightarrow$ Differenzierbarkeit

2. Ergebnis f nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 \Rightarrow f$ ist stetig oder unstetig an der Stelle x_0

f differenzierbar an der Stelle $x_0 \Rightarrow f$ stetig an der Stelle x_0

Stetigkeit ist eine **notwendige**, **aber nicht hinreichende Bedingung** für Differenzierbarkeit.

Differenzierbarkeit ist eine **hinreichende**, **aber nicht notwendige Bedingung** für die Stetigkeit.

4.12.7 Analytische Begründung

Analytische Begründung für die Aussage Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit:

Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0; x > x_0; x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert

Behauptung

$$\lim_{x \to x_0; x > x_0; x < x_0} f(x) = f(x_0)$$

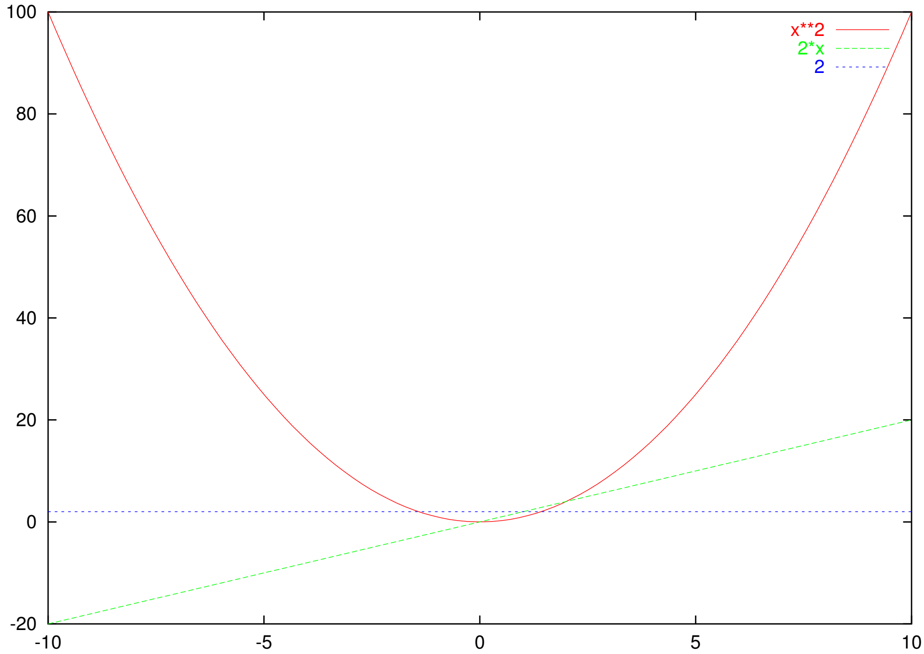
Beweis $x - x_0 \to 0$ für $x \to x_0$
$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \to 0$ für $x \to x_0$, da $f'(x_0)$ existiert.

$\Rightarrow f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$

d.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (q.e.d)

4.13 Die Ableitungsfunktion

4.13.1 Graph



$$f : x \mapsto x^2; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

4.13.2 Ableitung $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = 2x_0$$

$f'(x_0)$ verhällt sich wie eine Funktionsvorschrift.

$$\begin{aligned} f' &: x \mapsto 2x; \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R} \\ f'' &: x \mapsto 2; \mathbb{D}_{f''} = \mathbb{R} \\ f''' &: x \mapsto 0; \mathbb{D}_{f'''} = \mathbb{R} \\ f^{(4)} &: x \mapsto 0; \mathbb{D}_{f^{(4)}} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

4.13.3 Allgemein

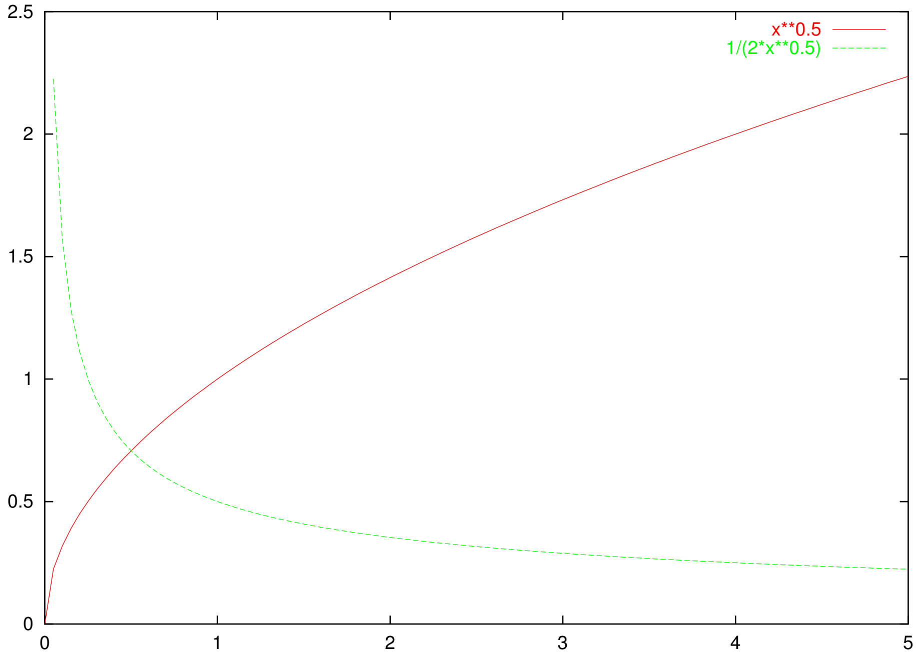
Funktion $f : x \mapsto f(x); x \in \mathbb{D}_f$
Ableitungsfunktion: $f' : x \mapsto f'(x); x \in \mathbb{D}_{f'}$

$\mathbb{D}_{f'} = \mathbb{D}_f$ oder $\mathbb{D}_{f'} \subset \mathbb{D}_f$ bzw. $\mathbb{D}_{f'} \subseteq \mathbb{D}_f$

4.13.4 Beispiel

$$f : x \mapsto \sqrt{x}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$$
$$\Rightarrow f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}}; \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}_0^+$$

f ist also an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar



4.14 Die Potenzregel

4.14.1 Beispiele

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$
$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$
$$f(x) = x^100 \Rightarrow f'(x) = 100x^99$$
$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

4.14.2 Beweis

Vorraussetzung

$$f(x) = x^n; n \in \mathbb{N}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Behauptung

$$f'(x) = nx^{n-1}; n \in \mathbb{N}; \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}$$

Beweis

Rechtsseitiger Grenzwert

$$g_r = \lim_{h \to 0} \frac{(x_o + h)^n - x_0{}^n)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0{}^n + nhx_0{}^{n-1} + h^2 T(x_0; h) - x_0{}^n}{h}$$
$$= nx_0{}^{n-1}$$

Wir betrachten $(x_0 + h)^n$

$$x_0 + h)^n = (x_0 + h)(x_0 + h)...(x_0 + h)$$

n Faktoren $(x_0 + h)$

$$= x_0{}^n + nhx_0{}^{n-1} + h^2 T(x_0; h)$$

$T(x_0; h)$ ist ein **ganzrationaler Term**

Linksseitiger Grenzwert Analog zum rechtsseitigen Grenzwert

Was zu beweisen war:

$$f'(x_0) = nx_0{}^{n-1}$$

Die Potenzregel gilt auch für rationale Exponenten (ohne Beweis!).

4.14.3 Satz

$$f(x) = x^r; r \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

4.15 Die Summenregel

4.15.1 Beispiel

$$f(x) = x^3 + x^2; \mathbb{D}_f = [-7; 12]$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x; \mathbb{D}_{f'} =]-7; 12[$$

4.15.2 Allgemein

$$f(x) = u(x) + v(x); \mathbb{D}_f = [a; b]$$
$$f'(x) = u'(x) + v'(x); \mathbb{D}_{f'} =]a; b[$$

4.15.3 Beweis

Voraussetzung u und v seien auf einem Intervall $[a; b]$ definiert und an der Stelle $x_0 \in]a; b[$ differenzierbar.

Behauptung $f(x) = u(x) + v(x)$ ist an der Stelle $x_0 \in]a; b[$ differenzierbar und es gilt: $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$.

Beweis u' und v' existieren $\Rightarrow u'(x_0) + v'(x_0)$ existiert.

$$\begin{aligned} u'(x_0) + v'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0) + v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) + v(x) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0} \\ f'(x_0) &= u'(x_0) + v'(x_0) \\ & q.e.d. \end{aligned}$$

4.16 Faktorregel

4.16.1 Regel

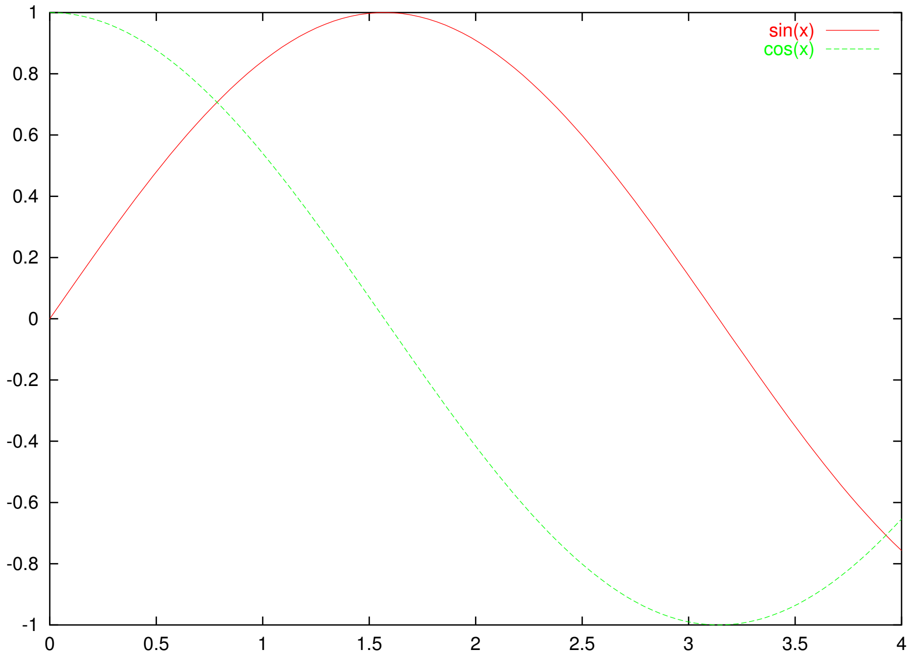
$f(x) = cu(x) \Rightarrow f'(x) = cu'(x); c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ falls $u(x)$ differenzierbar ist!

4.16.2 Kurzbeweis

$$\begin{aligned} f(x) &= cu(x) \\ \Rightarrow f'(x_0) &= lim_{x \to x_0} \frac{cu(x) - cu(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} c \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \\ &= lim_{x \to x_0} c \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \\ &= cu'(x_0) \\ & q.e.d. \end{aligned}$$

4.17 Ableitung der Trigonometrischen Funktionen

4.17.1 Sinusfunktion



$$s : x \mapsto sin(x); \mathbb{D}_s = \mathbb{R}$$

Voraussetzung $s(x) = sin(x)$ ist differenzierbar an der Stelle x_0

Behauptung

$$s'(x) = cos(x)$$

Beweis Aus Formelsammlung: $sin(x) - sin(y) = 2cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2})$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{sin(x_0 + h) - sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2cos(x_0 + \frac{h}{2})sin(\frac{h}{2})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0}(2cos(x_o + \frac{h}{2})) \lim_{h \to 0} \frac{sin(\frac{h}{2})}{h} \\
&= 2 \lim_{h \to 0}(cos(x_0 + \frac{h}{2}))\frac{1}{2} \lim_{\frac{h}{2} \to 0} \frac{sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}
\end{aligned}$$

$$= 2cos(x_0) * \frac{1}{2} * 1$$
$$= cos(x_0)$$
$$q.e.d.$$

4.17.2 Cosinusfunktion

$$c : x \mapsto cos(x); \mathbb{D}_c = \mathbb{R}$$

Voraussetzung $c(x) = cos(x)$ ist differenzierbar an der Stelle x_0

Behauptung

$$c'(x) = -sin(x)$$

Beweis

$$\lim_{h \to 0} \frac{cos(x_0 + h) - cos(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0}(-2sin(x_o + \frac{h}{2})) \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \frac{sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$$
$$= -sin(x_0)$$
$$q.e.d.$$

4.18 Beispielanalyse einer Funktionenschar

$$f_t : x \mapsto tx^2 + x - \frac{2}{t}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

4.18.1 Nullstellen von f_t

notwendig und hinreichend: $f_t(x_n) = 0$

$$tx^2 + x - \frac{2}{t} = 0$$
$$x_{n_{1,2}} = -1 \pm 3$$
$$x_{n_1} = \frac{1}{t} \Rightarrow N_1(\frac{1}{t}|0)$$
$$x_{n_1} = -\frac{2}{t} \Rightarrow N_2(-\frac{2}{t}|0)$$

4.18.2 Der Scheitel s_t

notwendig: $f_t'(x) = 2tx + 1$

$$\begin{aligned} 2tx + 1 &= 0 \\ x_s = -\frac{1}{2t} &\Rightarrow S(-\frac{1}{2t}| -\frac{9}{4t}) \end{aligned}$$

4.18.3 Ortskurve der Scheitelpunkte

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{1}{2t} \\ y_s &= -\frac{9}{4t} \end{aligned}$$

wir eliminieren t:

$$\begin{aligned} x_s = -\frac{1}{2t} &\Rightarrow t = -\frac{1}{2x_s} \\ y_s &= -\frac{9}{4(-\frac{1}{2x_s}} \\ &= -\frac{9}{-\frac{2}{x_s}} \\ &= \frac{9}{2}x_s \\ \Rightarrow K : y &= \frac{9}{2}x \end{aligned}$$

4.18.4 Gemeinsame Punkte

Es sei $t_1 \neq t_2$

Schnitt von Graph f_{t_1} mit dem Graph f_{t_2}:

$$\begin{aligned} t_1 x_s^2 + x_s - \frac{2}{t_1} &= t_2 x_s^2 + x_s - \frac{2}{t_2} \\ x_s^2(t_1 - t_2) + \frac{2}{t_2} - \frac{2}{t_1} &= 0 \\ (t_1 - t_2)x_s^2 &= \frac{2}{t_1} - \frac{2}{t_2} \\ x_s^2 &= \frac{2}{t_1(t_1 - t_2)} - \frac{2}{t_2(t_1 - t_2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2t_2 - 2t_1}{t_1 t_2 (t_1 - t_2)} \\
&= \frac{-2(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 - t_2)} \\
&= -\frac{2}{t_1 t_2}
\end{aligned}
$$

Da x_s von t_1 und t_2 abhängig ist, gibt es keine gemeinsamen Punkte!

4.18.5 Ortskurve der Punkte mit der Steigung 2

$$f_t^{'}(x_0) = 2$$

$$2tx_0 + 1 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2t} \Rightarrow y_0 = -\frac{5}{4t}$$

Ortskurve: t eliminieren

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{t2} \\
\Rightarrow t &= \frac{1}{2x_0} \\
y_0 = -\frac{5}{4\frac{1}{2x_0}} &= -\frac{5}{2}x_0 \\
\Rightarrow K : y &= -\frac{5}{2}x_0
\end{aligned}
$$

4.18.6 Die Stelle x_0, an der alle Graphen von f_t die gleiche Steigung haben

$$f_t^{'}(x) = 2tx + 1$$

Es sei $t_1 \neq t_2$:

$$
\begin{aligned}
2t_1 x_0 + 1 &= 2t_2 x_0 + 1 \\
t_1 x_0 &= t_2 x_0 \\
(t_1 - t_2) x_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Da $t_1 - t_2 = 0$ nach Voraussetzung $\Rightarrow x_0 = 0$. An der Stelle $x_0 = 0$ haben alle Grapehn f_t die Steigung 1.

4.19 Extremstellen und Extremwerte einer Funktion

4.19.1 Anschaulich

TODO: hier fehlt noch die kurve ...

Hochpunkte des Graphen sind P_1 und P_3

P_3 **ist ein absoluter Hochpunkt** Man sagt: f hat an der Stelle x_3 ein absolutes Maximum $f(x_3)$.

P_1 **ist ein relativer Hochpunkt** Man sagt: f hat an der Stelle x_1 ein relatives Maximum $f(x_1)$.

Relativer Tiefpunkt ist P_2. f hat an der Extremstelle x_2 ein relatives Minimum.

Betrachtung der Randstellen x_0 und x_4

P_0 **ist ein relativer Tiefpunkt**

P_4 **ist ein absoluter Tiefpunkt**

4.19.2 Zusammenfassung

Extremstellen

x_0, x_4: Randstellen
x_1, x_2, x_3: innere Stellen

Extremwerte

$f(x_0)$: relatives Minimum
$f(x_1)$: relatives Maximum
$f(x_2)$: relatives Minimum
$f(x_3)$: absolutes Maximum
$f(x_4)$: absolutes Minimum

Hochpunkte

$P_1(x_1|f(x_1))$
$P_3(x_3|f(x_3))$

Tiefpunkte

$P_0(x_0|f(x_0))$
$P_2(x_2|f(x_2))$
$P_4(x_4|f(x_4))$

4.20 Analytische Erfassung von Maxima und Minima einer Funktion

4.20.1 Definition des relativen Maximums

f sei auf einem Intervall $\mathbb{D}_f = I$ definiert. $f(x_e)$ heißt relatives Maximum der Funktion, wenn es eine Umgebung $U(x_e)$ gibt, so dass für alle $x \in U(x_e) \cap \mathbb{D}_f$ gilt:

$$f(x_e) \geq f(x)$$

Gilt diese Bedingung **für alle** $x \in \mathbb{D}_f$, so ist $f(x_e)$ sogar absolutes Maximum.

4.20.2 Definition des relativen Minimums

S.o. ..., so dass gilt:

$$f(x_e) \leq f(x)$$

4.20.3 Eigenschafen von f an einer Extremstelle x_e

Anschaulich: Wenn eine Funktion f eine Extremstelle x_e hat, dann hat der Graph an dieser Stelle

eine waagerechte Tangente (f ist dort also differenzierbar) oder

eine Knickstelle (f ist dort also nicht differenzierbar) oder

eine Sprungstelle (f ist dort also nicht differenzierbar) oder

eine Randstelle (f ist dort also nicht differenzierbar)

Zur Vereinfachung beschränken wir uns ab sofort auf Funktionen, die an der Stelle x_e differenzierbar sind.

4.20.4 Satz

Eine Funktion f sei an einer Stelle $x_e \in]a;b[$ differenzierbar. Wenn x_e eine Extremstelle ist, dann gilt $f'(x_e) = 0$.

4.20.5 Beweis

Voraussetzung f ist an der Stelle $x_e \in]a;b[$ differenzierbar und x_e sei Extremstelle.

Behauptung $f'(x_e) = 0$

Beweis $x \in U(x_e)$

$x > x_e \Rightarrow f(x) - f(x_e) \leq 0$ nach Definition des Maximums; $\Rightarrow$ Sekantensteigung: $m_{s_r} = \frac{f(x)-f(x_e)}{x-x_e} \leq 0$

$x < x_e \Rightarrow f(x) - f(x_e) \leq 0$ nach Definition des Maximums; $\Rightarrow$ Sekantensteigung: $m_{s_l} = \frac{f(x)-f(x_e)}{x-x_e} \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_e; x > x_e} m_{s_r} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_e; x < x_e} m_{s_l} \geq 0$$

Diese beiden Grenzwerte müssen gleich sein! Da $f'(x_e)$ existient (nach Voraussetzung) gilt: $f'(x_e) = 0$ q.e.d.

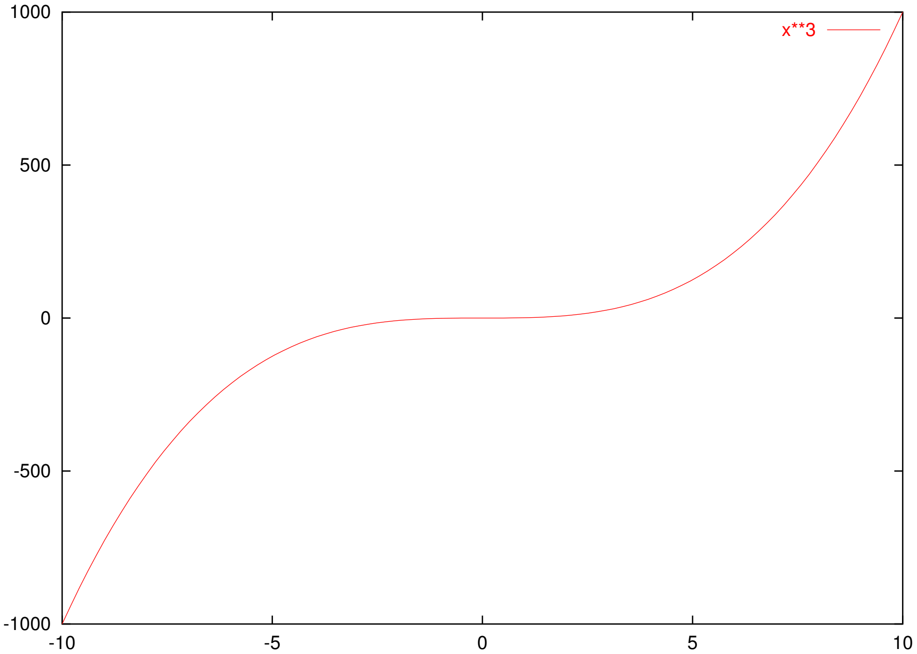
4.20.6 Kann man diesen Satz auch umkehren?

Wenn $f'(x_e) = 0$ dann ist x_e eine Extremstelle?

Gegenbeispiel

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

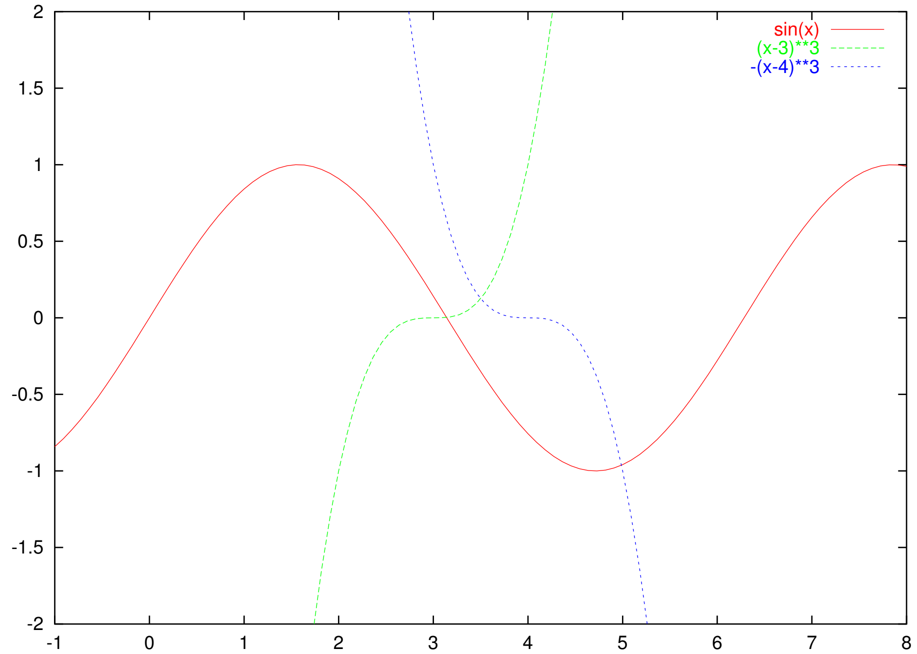


$P(0|0)$ ist ein Sattelpunkt, 0 ist Sattelstelle.

4.20.7 Notwendig / Hinreichend

$f'(x_e) = 0$ ist **notwendig**, aber nicht **hinreichend** für das Vorhandensein einer Extremstelle!

4.21 Hinreichendes Kriterium für eine Extremstelle



$x_{e_1} \approx 1,5; x_{e_2} \approx 4,7; x_{s_1} \approx 3; x_{s_2} \approx 4$

Wie kann man eine Extremstelle x_e von einer Sattelstelle x_s analytisch unterscheiden?

Extremstelle x_{e_1}: $x < x_{e_1}$: f streng monoton steigend $\Rightarrow f'(x) > 0$
$x > x_{e_1}$: f streng monoton fallend $\Rightarrow f'(x) < 0$

$f'(x)$ hat an der Stelle x_{e_1} also einen Vorzeichenwechsel von + nach -.

Extremstelle x_{e_2}: $f'(x)$ hat an der Stelle x_{e_2} einen Vorzeichenwechsel von - nach +.

Sattelstelle x_{s_1} (analog für x_{s_2}): $f'(x)$ hat an der Stelle x_{s_1} <u>keinen</u> Vorzeichenwechsel.

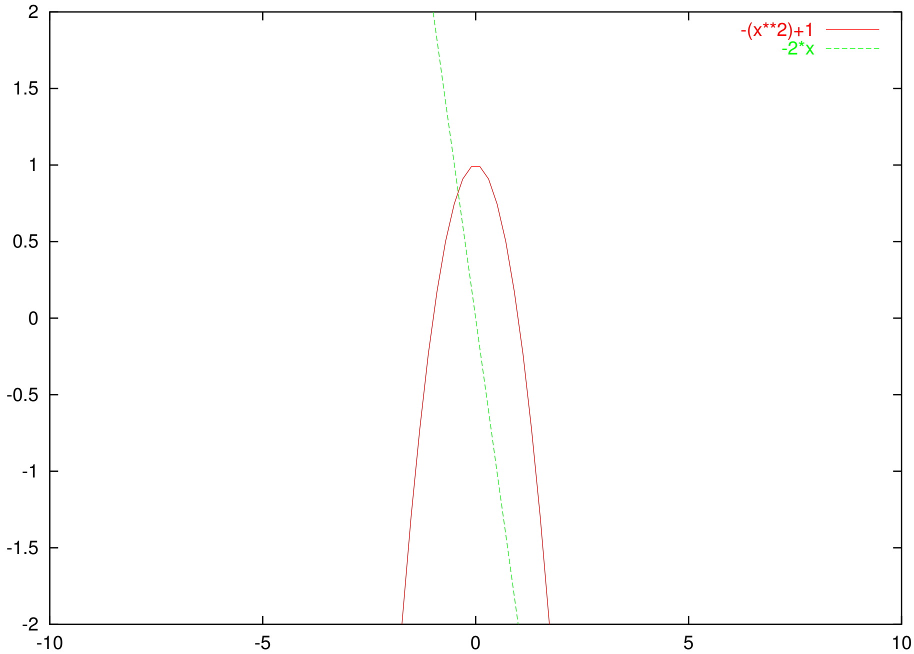
4.21.1 Satz: Vorzeichenwechselkriterium

f sei in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und es gelte $f'(x_0) = 0$.

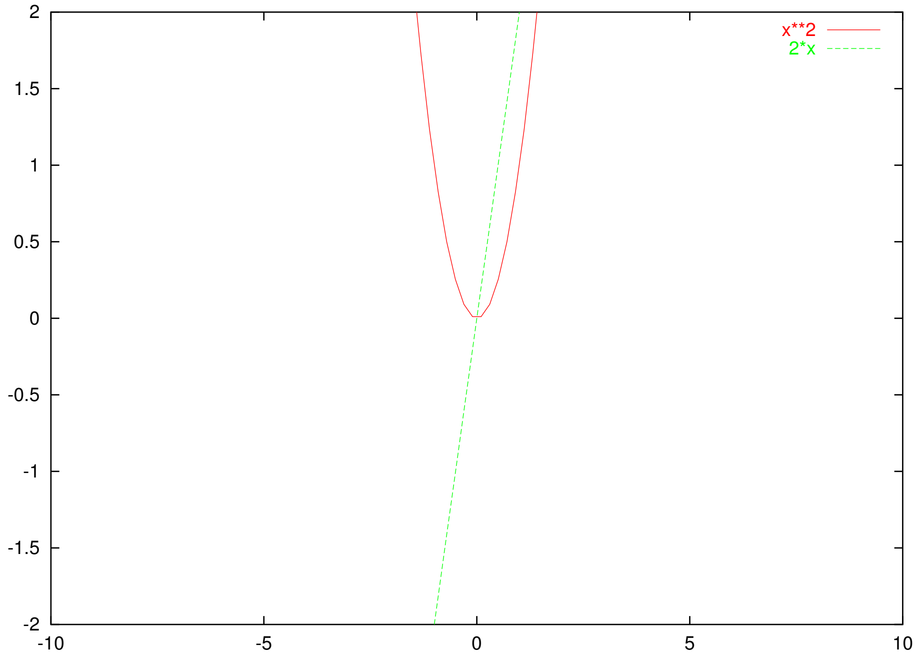
Wenn f' an der Stelle x_0 einen (+/-) Vorzeichenwechsel hat, dann liegt an der Stelle x_0 ein relativer Hochpunkt des Graphen von f vor.

Wenn f' an der Stelle x_0 einen (-/+) Vorzeichenwechsel hat, dann liegt an der Stelle x_0 ein relativer Tiefpunkt des Graphen von f vor.

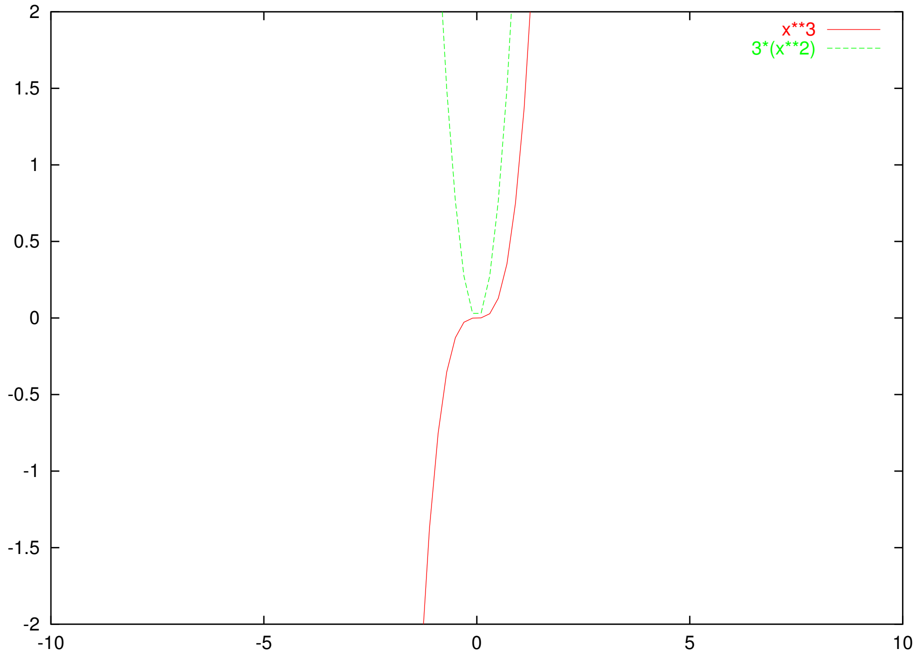
4.22 Vereinfachung des hinreichenden Vorzeichwechsel Kriteriums



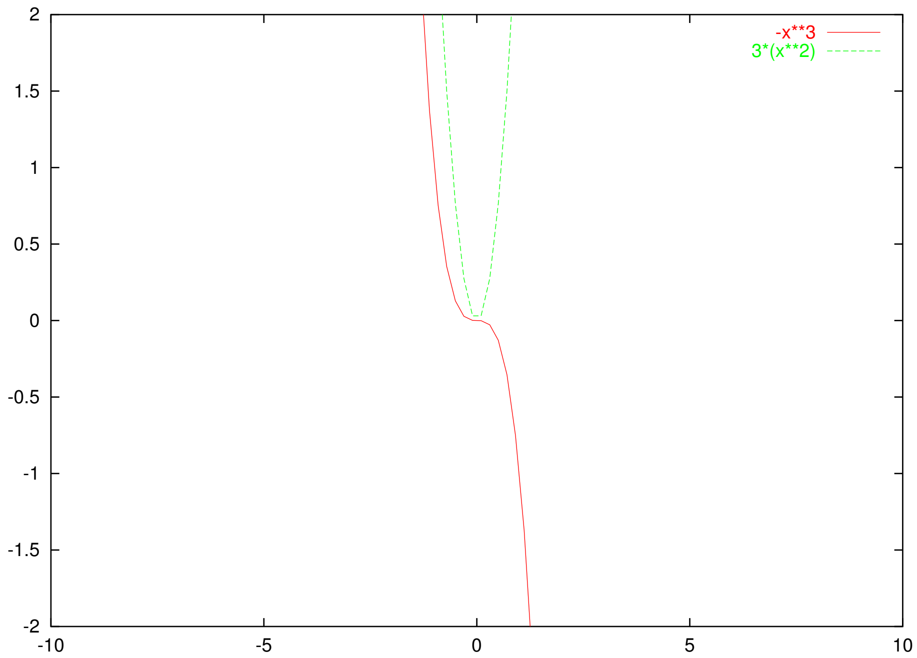
$f'(x_e) = 0; f''(x_e) \leq 0$



$f'(x_e) = 0; f''(x_e) \geq 0$



$f'(x_s) = 0; f''(x_s) = 0$



$f'(x_s) = 0; f''(x_s) = 0$

4.22.1 Satz

f sei an einer Stelle x_0 2 mal differenzierbar. Wenn $f'(x_0) = 0$ und. $f''(x_0) \neq 0$ dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives Extremum.

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum } f(x_0)$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{relatives Minumum } f(x_0)$$

4.22.2 Beweis für relatives Maximum

Voraussetzung: f ist zweimal differenzierbar, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

Behauptung $f(x_0)$ ist ein relatives Maximum.

Beweis

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{-} f'(x) x - x_0 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

in einer geeigneten Umgebung $U(x_0)$.

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

$\Rightarrow f'$ hat an der Stelle x_0 einen +/- Vorzeichenwechsel

$\Rightarrow f(x_0)$ ist ein relatives Maximum (q.e.d.)

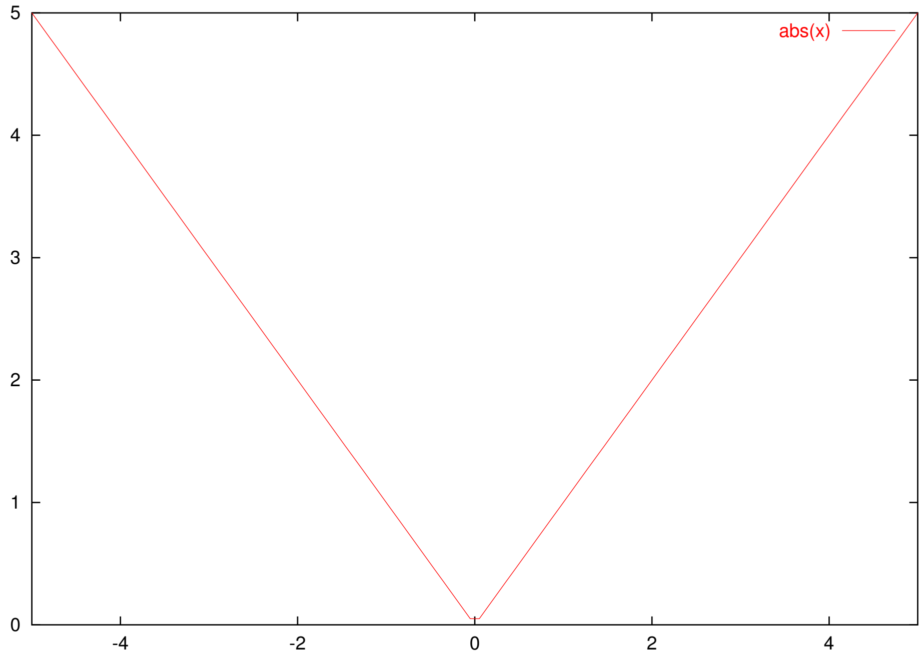
4.23 Verschiedene Funktionen

4.23.1 Die Betragsfunktion

$$f : x \mapsto |x|; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = \{x; x > 0$$
$$f(x) = \{0; x = 0$$
$$f(x) = \{-x; x < 0$$

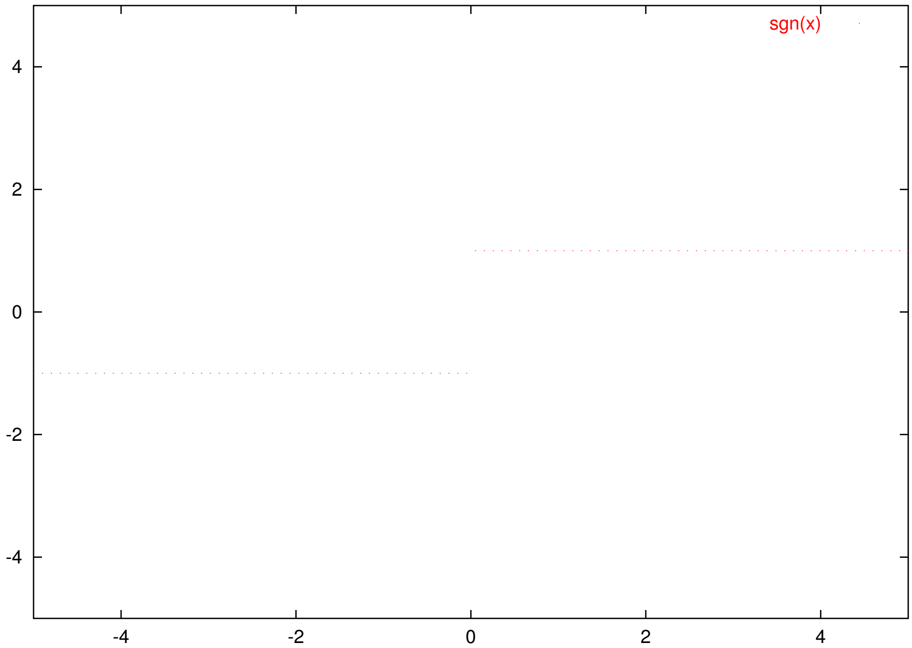


4.23.2 Die Signumfunktion

$$f : x \mapsto sgn(x)$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = \{1; x > 0$$
$$f(x) = \{0; x = 0$$
$$f(x) = \{-1; x < 0$$



4.23.3 Die Ganzteilfunktion (Gauß'sche Klammerfunktion)

$$f : x \mapsto [x]; x \in \mathbb{R}$$

$f(x) = \{x; x$ ganzzahlig
$f(x) = \{$ nächstkleinere ganze Zahl; x nicht ganzzahlig

4.24 Exponentialfunktionen

4.24.1 Beispiel 1

Ein Anfangskapital soll n Jahre zu einem Zinssatz von $p\%$ angelegt werden. Die Zinsen werden jährlich dem vorhandenen Kapital hinzugefügt. Bestimme die Wachstumsfunktion $K(n)$

$$K(0) = K_0$$

$$
\begin{aligned}
K(1) &= K_0 + K_0 * \frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100}) \\
K(2) = K(1) + K(1) * \frac{p}{100} &= K(1)(1 + \frac{p}{100}) \\
&= K_0(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100})
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$K(n) = K_0 * (1 + \frac{p}{100})^n$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} > 1 \Rightarrow \text{“}Wachstumsfaktor''$$

$$\Rightarrow K(n) = K_0 * q^n$$

4.24.2 Beispiel 2

Eine Bakterienkultur, die auf einem genügend großem Nährmedium angelegt wird wächst nach einem ganz bestimmten Gesetz: Das Zeitintervall, in der sich die kulzurbedeckte Fläche A verdoppelt (verdreifacht, ...) ist immer gleich, egal wieviele Bakterien momentan vorhanden sind. Bestimme die Wachstumsfunktion $A(t)$

t_2: Verdopplungszeit

$$
\begin{aligned}
A(0) &= A_0 \\
A(t_2) &= 2A_0 \\
A(2 * t_2) &= 4A_0
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$A(nt_2) = A_0 * 2^n$$

$$nt_2 = t \Rightarrow n = \frac{t}{t_2} \Rightarrow A(t) = A_0 * 2^{\frac{t}{t_2}}$$

4.24.3 Beispiel 3

Ein radioaktives Element x besitzt eine Halbwertszeit von t_H, d.h. jedes Zeitintervall t_H zerfällt die Hälfte der im Moment vorhandenen x-Kerne (Anzahl N). Zerfallsfunktion:

$$N(t) = N_0 * (\frac{1}{2})^{\frac{t}{t_H}}$$

4.24.4 Definition

$$f : x \mapsto a * b^x ; (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$$

heißt Exponentialfunktion zur Basis b. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

4.24.5 Spezialfall

$$a = 1 \Rightarrow f(x) = b^x$$

$0 < b < 1 \Rightarrow$ Zerfallsfunktion
$b > 1 \Rightarrow$ Wachstumsfunktion

4.24.6 Eigenschaften von $f(x) = b^x$

1. $0 < b < 1 \Rightarrow$ Graph f ist streng monoton fallend
   $b > 1 \Rightarrow$ Graph f ist streng monoton steigend
2. $S_y(0|1)$ für alle $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$
3. $0 < b < 1 \Rightarrow$ x-Achse ist Asymptote für $x \to +\infty$
   $b > 1 \Rightarrow$ x-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$
4. $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$ für alle $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$
5. $x_0 \in \mathbb{D}, h > 0$
   $f(x_0 + h) = b^{x_0+h} = b^{x_0} * b^h = f(x_0) * f(h)$
   "Funktionalgleichung einer Exponentialfunktion"
6. $f_1 : x \to b^x$ und $f_2 : x \to (\frac{1}{b})^x$
   Behauptung: Graph $f_1 \leftarrow$ Spiegelung an der Y-Achse $\to$ Graph f_2
   Beweis: $f_1(x) = b^x = \frac{1}{b^{-x}} = (\frac{1}{b})^{-1} = f_2(-x)$

4.24.7 Die e-Funktion

$f : x \to e^x$ mit $f'(x) = f(x)$

Satz: $h : x \to a * e^x ; (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ sind die einzigen Funktionen mit $h'(x) = h(x)$

4.25 Wiederholung Logarithmusbegriff

4.25.1 Definition

$log_a x$ ist die Hochzahl, mit der man a potenzieren muss, um x zu erhalten.

$$a^{log_a x} = x$$
$$log_a(a^x) = x$$

4.25.2 Logarithmusregeln

1. $log_a(\frac{b}{c}) = log_a(b) - log_a(c)$
2. $log_a(b * c) = log_a(b) + log_a(c)$
3. $log_a(b^c) = c * log_a(b)$

4.25.3 Umkehrbarkeit einer Funktion f

Definition: Eine Funktion f ist umkehrbar auf dem Intervall $[a; b] \subset \mathbb{D}$, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a; b]$ gilt:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Satz: $f : x \mapsto f(x)$ ist streng monoton wachsend (fallend) für alle $x \in [a; b] \Rightarrow f$ ist umkehrbar auf $[a; b]$.

Bekannt: $f : x \mapsto b^x; b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ ist für $b < 1$ streng monoton fallend und für $b > 1$ streng monoton wachsend.
$\Downarrow$
Es existiert eine Umkehrfunktion f^- von f!

4.25.4 Umkehrung der Exponentialfunktion

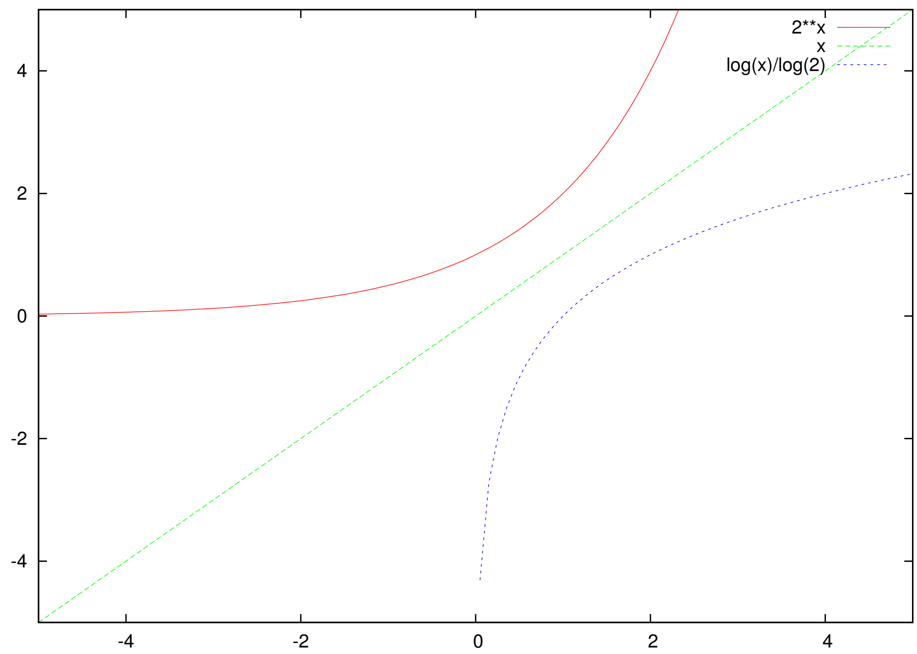
$$\begin{aligned} f(x) &= b^x \\ y &= b^x \\ x &= log_b y \end{aligned}$$

Vertauschen von x und y:

$$\begin{aligned} y &= log_b x \\ f^-(x) &= log_b x \end{aligned}$$

“Logarithmusfunktion”

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{f^-} &= \mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{W}_{f^-} &= \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \end{aligned}$$



4.25.5 Spezialfall: Umkehrung von $f(x) = e^x$

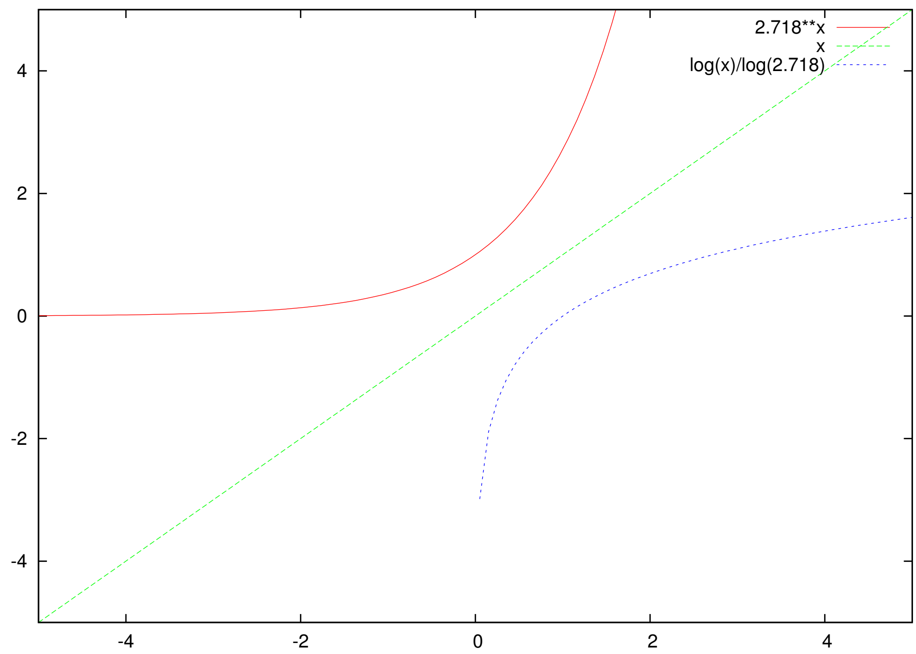
$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-}(x) = log_e x = ln x$
Es gilt:

$$e^{ln x} = x$$
$$ln(e^x) = x$$

4.26 Die ln-Funktion

4.26.1 Definition, Graph

$f : x \mapsto ln x; \mathbb{D} = \mathbb{R}^+, \mathbb{W} = \mathbb{R}$



4.26.2 Bekannt

$f^{-}(x) = e^x$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = ln(x)$

4.26.3 Ableitung

$(lnx)' = ?$

Annahme: $f : x \mapsto f(x)$ ist im Intervall I umkehrbar und in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
f^{-}(f(x_0)) &= x_0 \\
\Rightarrow [f^{-}(f(x_0))]' &= 1 \\
\Rightarrow f^{-'} f(x_0) * f'(x_0) &= 1 \\
\Rightarrow f^{-}(x_0) &= \frac{1}{f^{-'}(f(x_0))}
\end{aligned}
$$

hier: $f(x) = lnx; f^{-}(x) = e^x \Rightarrow ln'(x_0) = \frac{1}{e^{lnx_0}} = \frac{1}{x_0}$

Verallgemeinerung: $f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

4.27 Weitere Integrationsmethoden

4.27.1 Wiederholung

$f : x \mapsto f(x)$

1. f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ ist stetig
2. f ist stetig $\Rightarrow f$ ist integrierbar, d.h. f besitzt eine Stammfunktion F^*
3. F^* ist Stammfunktion von $f \Rightarrow \{F | F(x) = F^*(x) + c \wedge c \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge aller Stammfunktionen
4. f ist stetig $\Rightarrow I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist eine Integralfunktion von f mit $I_a'(x) = f(x)$
5. I_a ist eine Integralfunktion von $f \Rightarrow I_a$ ist eine Stammfunktion

4.27.2 Partielle Integration oder Produktintegration

$f(x) = u(x) * v(x) \Rightarrow$

$$f'(x) = (u(x) * v(x))' = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b (u(x) * v(x))'dx = \int\limits_a^b u'(x) * v(x)dx + \int\limits_a^b u(x) * v'(x)dx = [u(x) * v(x)]_a^b$$

Umgeformt:

$$\int\limits_a^b u(x) * v'(x)dx = [u(x) * v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x) * v(x)dx$$

Beispiel:

$$\int\limits_0^1 x * e^x dx$$

$$u(x) = x; u'(x) = 1$$
$$v(x) = e^x; v'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 x * e^x dx = [x * e^x]_0^1 - \int\limits_0^1 1 * e^x dx$$

4.27.3 Integration durch Substitution (1)

$$\mathbb{I}' \xrightarrow{g} \mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$u \to x \to f(x)$$
$$x = g(u)$$

Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(x)dx \underbrace{=}_{\substack{x=g(u);\,\frac{dx}{du}=g'(u)\to dx=g'(u)du;\\ u=\overline{g}(x)}} \int_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} f(g(u)) * g'(u)du$$

Beispiel:

$$\int_0^1 e^x\sqrt{e^x+1}dx \underbrace{=}_{\substack{x=g(u)=ln(u);g'(u)=\frac{1}{u};\\ u=\overline{g}(x)=e^x}} \int_1^e e^{ln(u)}\sqrt{e^{ln(u)}+1} * \frac{1}{u} = \int_1^e \sqrt{u+1}du$$

4.27.4 Integration durch Substitution (2)

Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(g(x)) * g'(x)dx \underbrace{=}_{u=g(x);g'(x)=\frac{du}{dx}} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Beispiel:

$$\int_1^2 e^{x^2} * 2x\,dx \underbrace{=}_{u=g(x)=x^2;g'(x)=2x} \int_1^4 e^u du$$

4.28 Differentialgleichungen

4.28.1 Definition

Eine Gleichung, in welcher die erste oder eine höhere Ableitung einer Funktion vorkommt heißt Differentialgleichung.

4.28.2 Anmerkungen

1. In einer Differentialgleichung **kann** auch die Funktion selbst oder die Funktionsvariable (meist x) vorkommen.

2. Die Lösungsmenge einer Differentialgleichung enthällt alle Funktionen, welche die Differentialgleichung erfüllen.

4.28.3 Beispiele

1. $f''(x) = k * f(x)$ (Differentialgleichung für Schwingungsvorgänge)
   Lösungen: $f(x) = a * \sin(bx + c)$

2. $f'(x) = k * f(x)$ (Differentialgleichung für exponentielle Wachstums- und Zerfallvorgänge)
   Lösungen: $f(x) = a * e^{bx}$

Kapitel 5

Stochastik

5.1 Zufallsexperimente

5.1.1 Kennzeichen

1. Die **Ergebnisse** können nicht vorausgesagt werden
2. Es sind mindestens zwei Ergebnisse möglich, die in der **Ergebnismenge** festgelegt werden
3. Die Ergebnismenge muss so festgelegt werden, dass bei der Durchführung des Experiments genau eines der Ergebnisse eintreten muss
4. Die Art der möglichen Ergebnisse wird (meistens) durch ein **Merkmal** festgelegt
5. Das Experiment kann unter gleichen Bedingungen wiederholt werden

5.1.2 Beschreibung

Ergebnismenge:

$$\mathbb{S} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

Ergebnisse:

$$e_i \in \mathbb{S}$$

Anzahl der Ergebnisse:

$$|\mathbb{S}| = n$$

5.1.3 Beispiele

1. 1 Würfel, 1 Wurf
   Merkmal: Augenzahl

$$\mathbb{S} = \{1, ..., 6\}; |\mathbb{S}| = 6$$

2. 1 Würfel, 1 Wurf
   Merkmal: Treffer = 6 oder Niete = Nicht 6

$$\mathbb{S} = \{T, N\}; |\mathbb{S}| = 2$$

3. 1 Münze, 1 Wurf
   Merkmal: Seite

$$\mathbb{S} = \{K, Z\}; |\mathbb{S}| = 2$$

4. 2 Würfel, 1 Wurf
   Merkmal: Augensumme

$$\mathbb{S} = \{2, ..., 12\}; |\mathbb{S}| = 11$$

5. 2 Würfel, 1 Wurf
   Merkmal: kleinere 2-stellige Zahl, die mit den Augenzahlen als Einer- und Zehnerziffer gebildet werden kann

$$\mathbb{S} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66\}; |\mathbb{S}| = 21$$

6. 2 Würfel, 1 Wurf
   Merkmal: geordnetes Zahlenpaar $(z_1; z_2)$; z_1 erster Würfel, z_2 zweiter Würfel

$$\begin{gathered} \mathbb{S} = \{ \\ (1;1), (1;2), ..., (1;6), \\ ... \\ (6;1), (6;2), ..., (6;6) \\ \}; |\mathbb{S}| = 36 \end{gathered}$$

5.2 Mehrstufige Zufallsexperimente

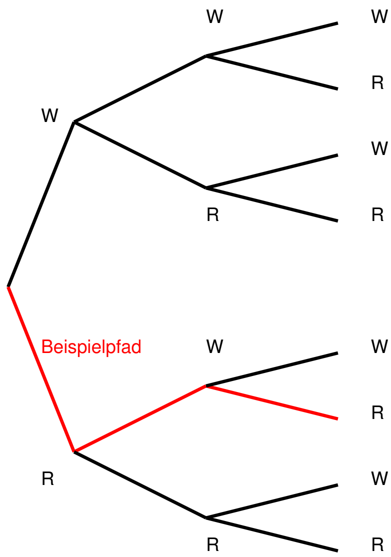
5.2.1 Einleitung

Die Ergebnisse eines n-stufigen Zufallsexperiments sind n-Tupel $(e_1; e_2; ...; e_n)$, wobei e_i das Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist.

5.2.2 Beispiele

1. Urne: 3 rote, 1 weiße Kugel, 3x **Ziehen mit Zurücklegen**
   Merkmal: Farbfolge

   Baumdiagramm:

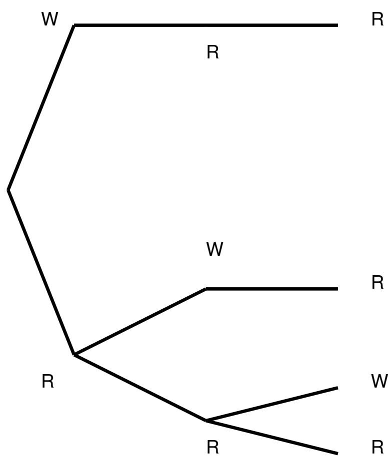


   Jedes Ergebnis entspricht einem Pfad im Baumdiagramm

$$\mathbb{S} = \{WWW, WWR, ..., RRW, RRR\}; |\mathbb{S}| = 8$$

2. Urne: 3 rote, 1 weiße Kugel, 3x **Ziehen ohne Zurücklegen**
   Merkmal: Farbfolge

   Baumdiagramm:



$$\mathbb{S} = \{WRR, RWR, RRW, RRR\}; |\mathbb{S}| = 4$$

3. Mithilfe der Buchstaben A und T werden "Wörter" aus 3 Buchstaben gebildet.

$$\mathbb{S} = \{AAA, AAT, ATA, ATT, TAA, TAT, TTA, TTT\}; |\mathbb{S}| = 8$$

4. Fritz und Emil spielen gegeneinander. Sieger ist, wer 2 Spiele hintereinander bzw. 3 Spiele gewonnen hat.

$$\mathbb{S} = \{FF, FEFF, FEFEF, FEFEE, FEE, EFF, EFEFF, EFEFE, EFEE, EE\}; |\mathbb{S}| = 10$$

5. Ein Glücksrad mit den Feldern A, B, C wird 2 mal gedreht

$$\mathbb{S} = \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}; |\mathbb{S}| = 9$$

6. Ein Würfel wird solange geworfen, bis eine 6 erscheint.
Merkmal: Anzahl der Versuche

$$\mathbb{S} = \{1, ..., \infty\};$$

5.3 Ereignisse

5.3.1 Definition

$$\mathbb{S} = \{e_1, ..., e_n\}$$

1. Jede Teilmenge $\mathbb{A}$ von $\mathbb{S}$ beschreibt ein Ereignis des Zufallsexperiments ($\mathbb{A} \leq \mathbb{S}$ oder $\mathbb{A} \subset \mathbb{S}$)
2. Die Menge $P(\mathbb{S})$ aller Ereignisse ist der Ereignisraum des Zufallsexperiements
3. Ein Ereignis $\mathbb{A}$ ist eingetreten, wenn für ein Ergebnis $e_1 \in \mathbb{S}$ auch $e_1 \in \mathbb{A}$ gilt

5.3.2 Anmerkungen

$P(\mathbb{S})$ Potenzmenge $\mathbb{S}$, z.B.: $\mathbb{S} = \{a, b, c\}$

$$\Rightarrow P(\mathbb{S}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$|P(\mathbb{S})| = 2^{|\mathbb{S}|}$$

5.3.3 Besondere Ereignisse

- $\mathbb{S} = \{e_1, ..., e_n\}$
- $\mathbb{A} = \{e_1\}$ Elementarereignis
- $\mathbb{A} = \{\}$ Unmögliches Ereignis
- $\mathbb{A} = \mathbb{S}$ sicheres Ereignis
- $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{S} \setminus \mathbb{A}$ Gegenereignis

Es gilt:

- $\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{A}} = \{\}$
- $\mathbb{A} \cup \overline{\mathbb{A}} = \mathbb{S}$

5.3.4 Beispiele

1. Zu einer Party werden 2 Mädchen und 2 Jungen erwartet, die 5 Gäste treffen nacheinander ein.
   Merkmal: Reihenfolge

   $$\mathbb{S} = \{MMJJJ; JJJMM; MJJJM; JMJMJ; ...\}; |\mathbb{S}| = 10$$

   Ereignisse:

   - $\mathbb{A}$: der 1. Gast ist ein Mädchen, $|\mathbb{A}| = 4$
   - $\mathbb{B}$: unter den ersten 3 Gästen sind 2 Mädchen, $|\mathbb{B}| = 3$
   - $\mathbb{C}$: der letzte Gast ist kein Junge, $|\mathbb{C}| = 3$

2. Für die Lieferung von 4 Motoren werden folgende Ereignisse betrachtet:

   - $\mathbb{A}$: mindestens 1 Motor ist defekt
   - $\mathbb{B}$: höchstens 1 Motor ist defekt

   $$\Rightarrow$$

   - $\overline{\mathbb{A}}$: kein Motor ist defekt
   - $\overline{\mathbb{B}}$: mindestens 2 Motoren sind defekt

5.3.5 Vierfelder Tafel

1 entspricht Motor defekt, 0 entspricht Motor nicht defekt

	A	$\overline{\text{A}}$
B	0001, 0010 0100, 1000	0000
$\overline{\text{B}}$	0011, 0101, 0110, 0111 1001, 1010, 1011, 1100 1101, 1110, 1111	

S

- $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$: genau 1 Motor ist defekt
- $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$: es können 0, 1, 2, 3 oder 4 Motoren defekt sein
- $\overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{B}} = \{\}$
- $\overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{B}}$: es können 0, 2, 3 oder 4 Motoren defekt sein

5.3.6 Beschreibung von Ereignissen

1. Durch Aufzählung aller Ergebnisse die zu dem Ereignis gehören
2. In Worten
3. Durch eine **Zufallsgröße**

5.4 Zufallsgrößen

5.4.1 Definition

Eine Zufallsgröße ist eine Funktion X, die jedem Ergebnis aus $\mathbb{S}$ eine reelle Zahl zuordnet:

$$X : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$$
$$e_i \mapsto X(e_i) = k$$

5.4.2 Veranschaulichung

$$\mathbb{A} = \{e_i \in \mathbb{S} | X(e_i) = k\} \subseteq \mathbb{S}$$

Kurzschreibweise: **Ereignis X=k**
Verallgemeinerung: $X < k$; $X > k$; $X \leq k$; $X \geq k$

5.4.3 Beispiele

1. Ein Zufallsexperiment hat als Ergebnisse die natürlichen Zahlen von 20 bis 39. X sei Zufallsgröße für die Quersumme. Welche Ereignisse werden durch $X = 7$, $X = 11$ und $X < 5$ beschrieben?

$$X = 7 \rightarrow \mathbb{A} = \{25; 34\}$$
$$X = 11 \rightarrow \mathbb{A} = \{29; 38\}$$
$$X < 5 \rightarrow \mathbb{A} = \{20; 21; 22; 30; 31\}$$

2. Ein Zufallsexperiment hat als Ergebnisse die natürlichen Zahlen von 1 bis 16. X beschreibt die Anzahl der Teiler. Welche Ereignisse werden durch $X = 2$, $X = 4$, $1 < X \leq 4$ beschrieben?

$$X = 2 \rightarrow \mathbb{A} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$$
$$X = 4 \rightarrow \mathbb{A} = \{6; 8; 10; 14; 15\}$$
$$1 < X \leq 4 \rightarrow \mathbb{A} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 14; 15\}$$

5.5 Wahrscheinlichkeit

5.5.1 eines Ergebnisses

Definition 1

$$\mathbb{S} = \{e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n\}$$
$$P : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}, e_i \mapsto P(e_i)$$

heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion** wenn

1. $0 \leq P(e_i) \leq 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ und

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$ gelten

Bezeichnung

Der Funktionswert $P(e_i)$ heißt **Wahrscheinlichkeit** des Ergebnisses e_i.

5.5.2 eines Ereignisses

Definition 2

$$\mathbb{S} = \{e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n\}, \mathbb{A} \subseteq \mathbb{S}$$
$$P(\mathbb{A}) = \sum_{e_i \in \mathbb{A}} P(e_i)$$

Es gilt:

1. $P(\{e_i\}) = P(e_i)$

2. $P(\{\}) = 0$ (unmögliches Ereignis)

3. $P(\mathbb{S}) = 1$ (sicheres Ereignis)

4. $P(\overline{\mathbb{A}}) = 1 - P(\mathbb{A})$

5.6 Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen (Ergebnissen)

5.6.1 Über theoretische Annahmen

Annahme

Bei einem Zufallsexperiment sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich

$$\Updownarrow$$

Das Zufallsexperiment ist ein **Laplace-Experiment**

Satz 1

Laplace-Experiment mit $\mathbb{S} = \{e_1, ..., e_i, ..., e_n\}$ und $|\mathbb{S}| = n$

$$\Rightarrow P(e_i) = \frac{1}{n}$$

Beweis:

1. $P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_i) = P(e_n)$
2. $P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_i) + ... + P(e_n) = 1$

Aus 1 und 2 $\Rightarrow n * P(e_i) = 1$

$$\Rightarrow P(e_i) = \frac{1}{n}$$

Satz 2

Laplace-Experiment mit $\mathbb{S} = \{e_1, ..., e_i, ..., e_n\}$ und $|\mathbb{S}| = n$ und $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{S}$ mit $|\mathbb{A}| = k$

$$\Rightarrow P(\mathbb{A}) = \frac{|\mathbb{A}|}{|\mathbb{S}|} = \frac{k}{n}$$

Beweis:

$$P(\mathbb{A}) = \sum_{e_i \in \mathbb{A}} P(e_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{\text{k Summanden}}$$

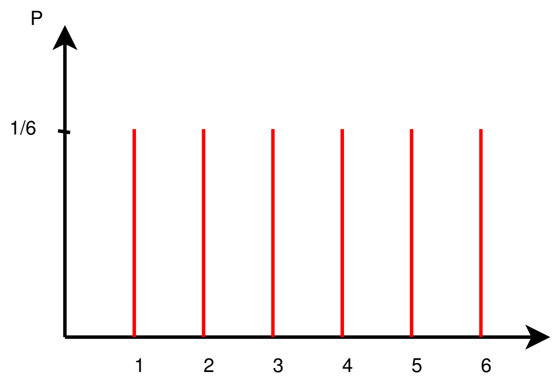
$$= k\frac{1}{n}$$

Beispiele

1. 1 Würfel, 1 Wurf, Merkmal: Augenzahl $\mathbb{S} = \{1, ..., 6\}; |\mathbb{S}| = 6$

$$\Rightarrow P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$$

Stabdiagramm:



Wahrscheinlichkeitsverteilung (= Gleichverteilung)

2. 2 Würfel, 1 Wurf, Merkmal: Augensumme $\mathbb{S} = \{2, ..., 12\}; |\mathbb{S}| = 11$

ABER! Kein Laplace-Experiment, da $P(2) \neq P(3) \neq ...$

$$\Downarrow$$

Verfeinerung der Ergebnismenge

$$\Uparrow$$

Änderung des Merkmals

$$\begin{gathered}\mathbb{S} = \{ \\ (1;1), (1;2), ..., (1;6), \\ ... \\ (6;1), (6;2), ..., (6;6) \\ \}; |\mathbb{S}| = 36\end{gathered}$$

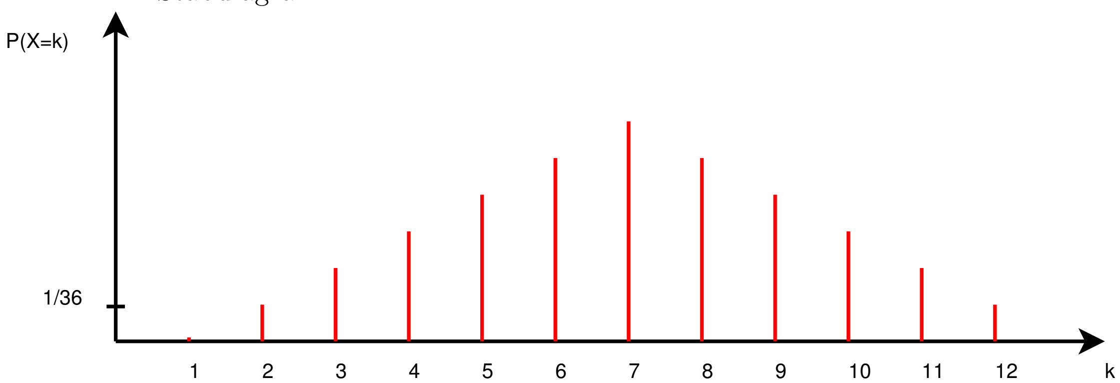
$P((a_1; a_2)) = \frac{1}{36}$, Zufallsgröße $X = k$, mit $k =$ Augensumme

$$P(X = 2) = \frac{1}{36}$$
$$P(X = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$
$$P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$...$$

$$P(X = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$
$$P(X = 12) = \frac{1}{36}$$

Stabdiagramm:



Symetrische Verteilung

5.6.2 Über die relative Häufigkeit bei einer hinreichend großen Anzahl von Durchführungen eines Zufallsexperiments

n-Durchführungen eines Zufallsexperiments, k-maliges Eintreten des Ereignisses $\mathbb{A}$.

$$\rightarrow k \text{ ist die absolute Häufigkeit,}$$

$$\rightarrow \frac{k}{n} \text{ ist die relative Häufigkeit des Ereignisses}$$

Computersimulation: Doppelwürfelexperiment mit n Versuchen. $n = 10, 100, 1000, 1000000$.

Erkenntnis: für sehr große n gilt: $H(\mathbb{A}) \approx P(\mathbb{A})$, wobei $H(\mathbb{A})$ relative Häufigkeit und $P(\mathbb{A})$ Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist.

5.7 Wahrscheinlichkeiten von mehrstufigen Zufallsexperimenten

5.7.1 Beispiel 1

Urne: 1R, 3W Kugeln, 2x Ziehen **mit** Zurücklegen, Merkmal: Farbfolge

$$\mathbb{S} = \{W_1W_2; W_1W_3; ...\}; |\mathbb{S}| = 16$$

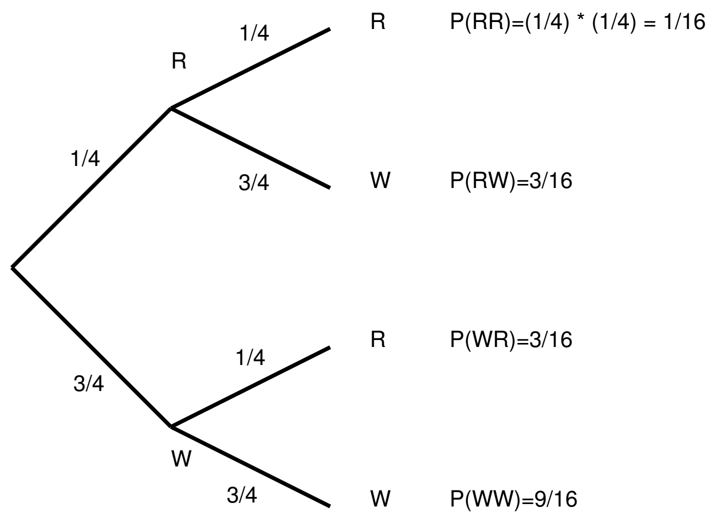
$$\mathbb{A}_{WW} = \{W_1W_2; ...\} \Rightarrow P(X = WW) = \frac{9}{16}$$

$$\mathbb{A}_{WR} = \{W_1R; ...\} \Rightarrow P(X = WR) = \frac{3}{16}$$

$$\mathbb{A}_{RW} = \{RW_1; ...\} \Rightarrow P(X = RW) = \frac{3}{16}$$

$$\mathbb{A}_{RR} = \{RR\} \Rightarrow P(X = RR) = \frac{1}{16}$$

Baumdiagramm:



5.7.2 1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist das **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten an den **"Ästen"** des **zugehörigen Pfades**.

Beachte! Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen die von einem Verzweigungspunkt ausgehen ist stets 1.

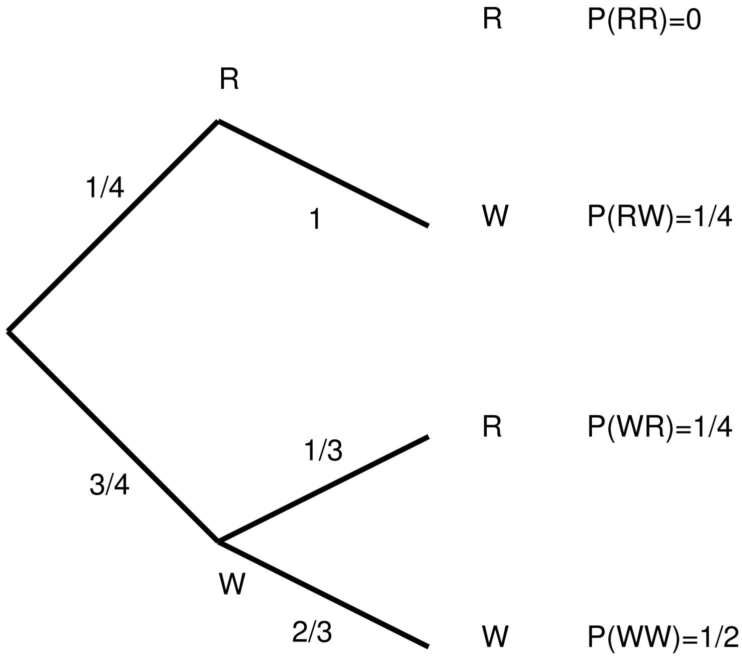
5.7.3 Beispiel 2

Urne: 1R, 3W Kugeln, 2x Ziehen **ohne** Zurücklegen

$$\mathbb{S} = \{W_1W_2; W_2W_1; ...\}; |\mathbb{S}| = 12$$

$$P(X = WW) = \frac{1}{2}$$
$$P(X = RW) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = WR) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = RR) = 0$$

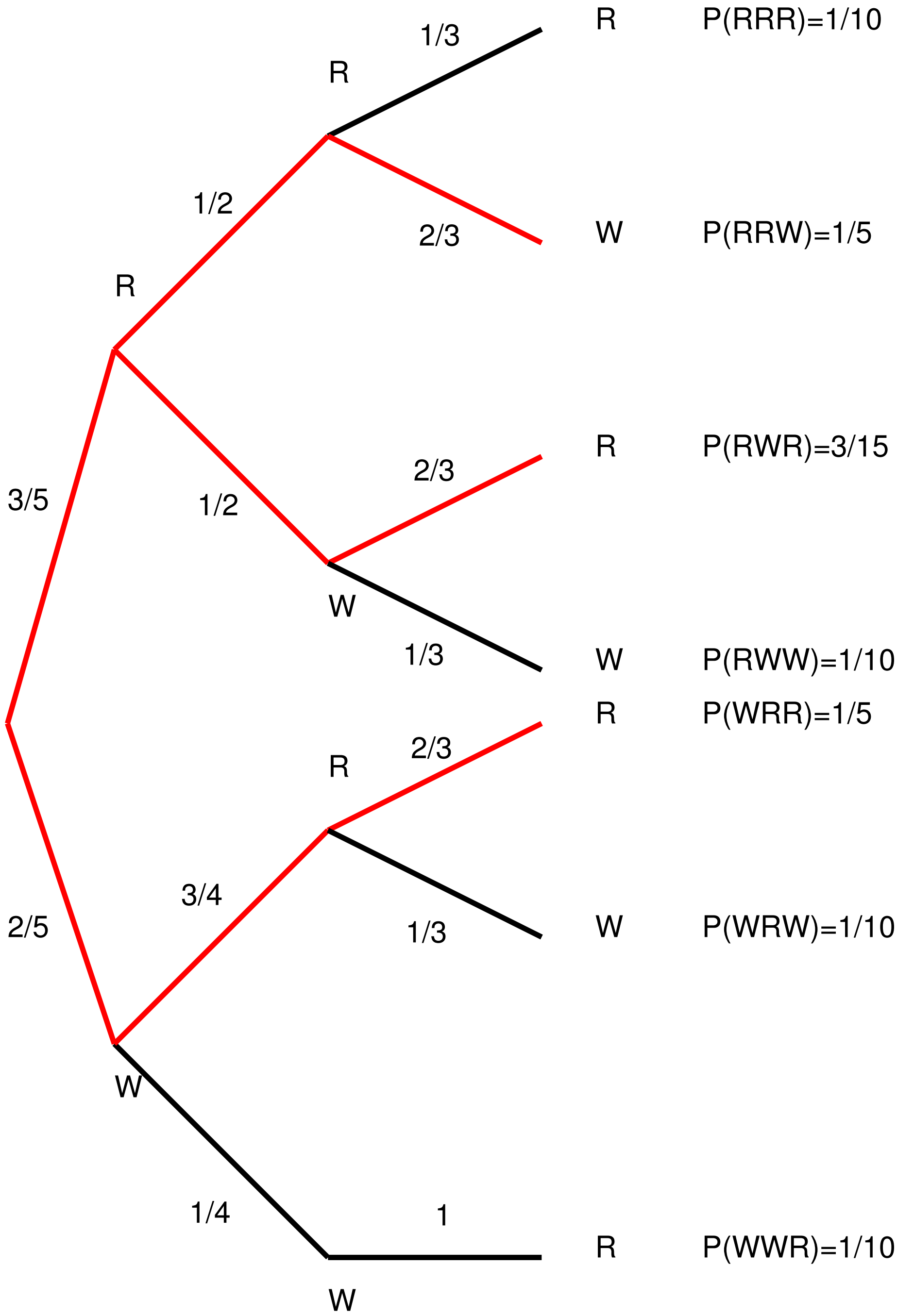
Baumdiagramm:



5.7.4 Beispiel 3

Urne: 3R, 2W Kugeln; 3x Ziehen **ohne** Zurücklegen

Baumdiagramm:



$X = k_1$ mit $k_1 =$ Anzahl der weißen Kugeln, $Y = k2$ mit $k_2 =$ Anzahl der roten Kugeln.

Gesucht: $P(X = 1), P(X = 2), P(Y \leq 2), P(Y = 0)$.

$$P(X = 1) = \frac{1}{5} + \frac{3}{15} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$
$$P(Y \leq 2) = \frac{9}{10}$$
$$P(Y=0) = 0$$

5.7.5 2. Pfadregel

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die dieses Ereignis bilden.

5.8 Exkurs: Kombinatorik

5.8.1 Ziehen mit Wiederholung, mit Beachtung der Reihenfolge

$$|\mathbb{M}| = n$$
$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, ..., x_k) | x_i \in \mathbb{M} \textbf{ mit } \text{WH}\}; k \leq n$$
$$\Rightarrow |\mathbb{S}| = n^k$$

5.8.2 Ziehen ohne Wiederholung, mit Beachtung der Reihenfolge

$$|\mathbb{M}| = n$$
$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, ..., x_k) | x_i \in \mathbb{M} \textbf{ ohne } \text{WH}\}; k \leq n$$
$$\Rightarrow |\mathbb{S}| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5.8.3 Ziehen ohne Wiederholung, ohne Beachtung der Reihenfolge

$$|\mathbb{M}| = n$$
$$\mathbb{S} = \{\{x_1, x_2, ..., x_k\} | x_i \in \mathbb{M} \textbf{ ohne } \text{WH}\}; k \leq n$$
$$\Rightarrow |\mathbb{S}| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

5.8.4 Definition: Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!n!}$$

"Eulersches Symbol" oder "Binomialkoeffizient"

5.9 Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette

5.9.1 Einleitung

Bei vielen Untersuchungen (Stichproben) spielen Zufallsexperimente mit nur zwei Ergebnissen eine Rolle: z.B. Münzwurf (Kopf, Zahl), Würfel (6, nicht 6), Qualitätskontrolle (defekt, nicht defekt).

$$\Downarrow$$

Treffer (T) und Niete (N)

5.9.2 Definitionen

1. Ein Zufallsexperiment mit $\mathbb{S} = \{T, N\}$, also $|\mathbb{S}| = 2$, ist ein **Bernoulli-Experiment** mit der **Trefferwahrscheinlichkeit** p.

2. Eine Bernoulli-Kette der Länge n ist ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit der selben Trefferwahrscheinlichkeit p besteht.

5.9.3 Beispiele

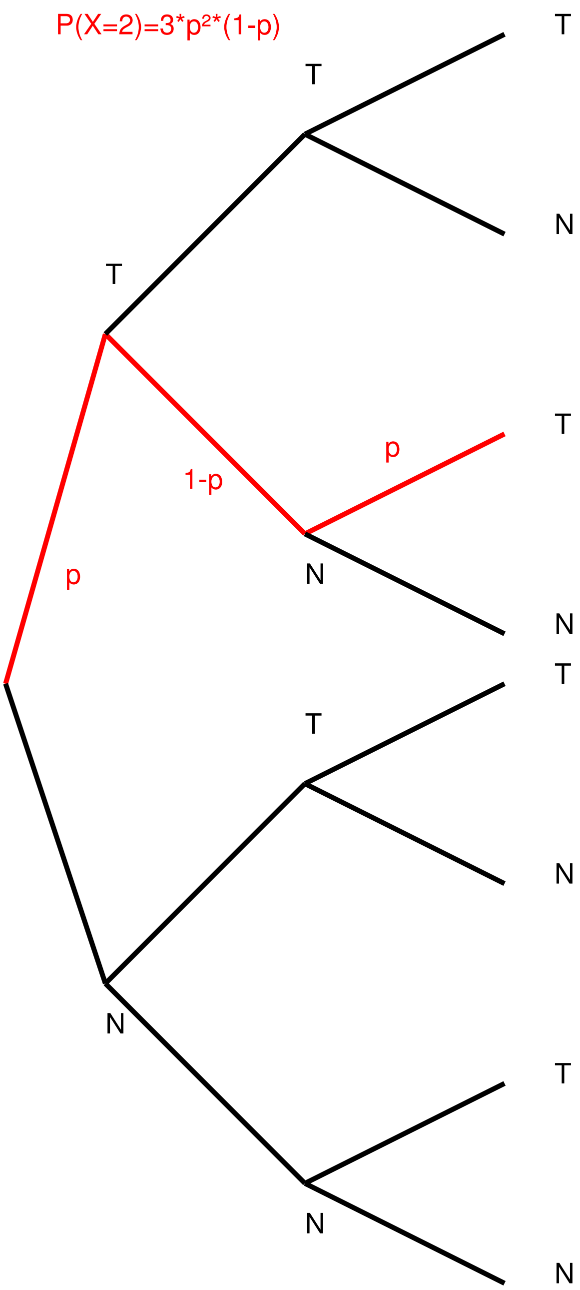
Urne:

N Kugeln $\rightarrow$ S schwarze Kugeln $\rightarrow$ (N-S) weiße Kugeln
n-mal Ziehen **mit** Zurücklegen

Ereignis:

X=k mit k=Anzahl der Treffer (= schwarze Kugel)
$P(X = k)$ Wahrscheinlichkeit für k Treffer.
Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{S}{N}$, Wahrscheinlichkeit für Niete $\frac{N-S}{N} = 1 - p$

Baumdiagramm für $n = 3$



$\Rightarrow$

5.9.4 Verallgemeinerung

$$n \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq n$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k * (1-p)^{n-k}$$

"Formel von Bernoulli"

Erläuterungen:

- $p^k * (1-p)^{n-k}$ Wahrscheinlichkeit **eines** Pfades mit k Treffern
- $\binom{n}{k}$ **Anzahl** der Pfade mit k Treffern
- $\binom{n}{k} p^k * (1-p)^{n-k}$ Wahrscheinlichkeit **aller** Pfade mit k Treffern

5.9.5 Definition Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = k)$ mit $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferzahl k und der Trefferwahrscheinlichkeit p ist eine **Binomialverteilung** $B_{n;p}(k)$ mit den Parametern n, p und k.

Kurz:

$P(X = k) = B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} p^k * (1-p)^{n-k}$

5.9.6 Definition Summierte Binomialverteilung

$F_{n;p}(k) = P(X \leq k) = B_{n;p}(0) + B_{n;p}(1) + ... + B_{n;p}(k)$ heißt **summierte Binomialverteilung** mit den Parametern n und p.

Anmerkung:

$B_{n;p}$ und $F_{n;p}$ werden in Mathebüchern oft als Tabellen vorgegeben!

Wichtig:

Die summierte Wahrscheinlichkeit eigent sich besonders dann, wenn die **k-Werte** in einem **zusammenhängenden Bereich** liegen:

$0 \leq k \leq n$**:**

$$P(X \leq k) = F_{n;p}(k)$$

$0 \leq i \leq k \leq n$**:**

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq (k-1)) = 1 - F_{n;p}(k-1)$$

$$P(X > k) = 1 - F_{n;p}(k)$$

$0 \leq k_1 < k_2 \leq n$:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - P(X < k_1) = F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1 - 1)$$
$$P(k_1 < X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1) = F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1)$$

5.10 Erwartungswert einer Zufallsgrößen

5.10.1 Beispiel: Glücksspiel

Spielregeln

1 Spieler zahlt EUR 1 Einsatz und wirft einen Laplace-Würfel 3 mal. Erscheint dabei eine 6 ein-, zwei- oder dreimal, so erhält er seinen Einsatz zurück und außerdem einen Gewinn von EUR 1, EUR 2 bzw. EUR 3. Erscheint keine 6 ist der Einsatz verloren. Ist das Spiel "fair"?

1. Zufallsexperiment

(100 mal spielen)

Ereignis	0x6	1x6	2x6	3x6
Anzahl	54	36	9	1
Gewinn	-1	1	2	3

Ereignis $X = x_i$ mit $x_i =$ Gewinn, $x_i \in \{-1; 1; 2; 3\}$
(arithmetischer Mittelwert von x: $\overline{x} = \frac{54}{100} * (-1) + \frac{30}{100} * 1 + \frac{9}{100} * 2 + \frac{1}{100} * 3 = 0,03$ (EUR))
Wichtig: Der **Mittelwert** bezieht sich auf die **Vergangenheit**, denn er verwendet die Informationen, die in einer Stichprobe (Zufallsexperiment) tatsächlich aufgetreten sind.

2. Berechnung des Erwartungswertes

$X = x_i$ mit $x_i =$ Gewinn, $x_i \in \{-1; 1; 2; 3\}$
Definition: X ist eine Zufallsgröße mit $X = x_i$ und $x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i * P(X = x_i)) = x_1 * P(X = x_1) + ... + x_n * P(X = x_n)$$

ist der **Erwartungswert** von X, kurz: $E(X) = \mu$
Wichtig: Der **Erwartungswert** bezieht sich auf die **Zukunft**, denn er gibt an, welcher Mittelwert von x bei einem **sehr großen Stichprobenumfang** oder aufgrund **theoretischer Betrachtungen** zu erwarten ist.

Zurück zum Glücksspiel:

Ereignis $X = x_i$	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{4}(x_i * P(X = x_i)) \approx -0,0789$$

$\Rightarrow E(X) < 0 \Rightarrow$ Das Spiel ist nicht fair, d.h. es lohnt sich für den Spieler auf lange Sicht nicht!

5.10.2 Wann ist ein Spiel fair

Wenn gilt $E(X) = 0$

5.10.3 Satz zum Erwartungswert

X ist eine binomial verteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p

$$\Rightarrow E(X) = np$$

5.11 Standardabweichung

5.11.1 Wiederholung: Erwartungswert

Zufallsgröße $x = x_i$ mit $x_i \in \{x_i, ..., x_n\}$

$$\Downarrow$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	...	...	...	...

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

$$\Downarrow$$

Erwartungswert $E(X)$ (zu erwartender Mittelwert bei einem sehr großen Stichprobenumfang)

$$E(X) = x_i * P(X = x_i) + ... + x_n * P(X = x_n)$$

5.11.2 Maß für "mittlere Abweichung"

Gesucht: Maß für die "mittlere Abweichung" oder die "Streuung" der Werte von X vom Erwartungswert $E(X)$.

5.11.3 Definition Varianz und Standardabweichung

Zufallsgröße $X = x_i$ mit $x_i \in \{x_i, ..., x_n\}$ und $E(X) = \mu$

1. $V(X) = (x_1 - \mu)^2 * P(X = x_1) + ... + (x_n - \mu)^2 * P(X = x_n)$ heißt **Varianz** von X
2. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ heißt **Standardabweichung** von X

Beachte: $V(X) = \sigma(X)^2 = \sigma^2$

5.11.4 Satz zur Standardabweichung

Eine binomial verteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{np * (1 - p)}$$

(ohne Beweis)

5.12 Bedeutung der Standardabweichung für binomialverteilte Zufallsgrößen

5.12.1 $r\sigma$ - Intervalle

$$r \in \mathbb{R}^+$$

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{np * (1 - p)}$$

Problem: Was ist $P(\mu - r\sigma \leq X \leq \mu + r\sigma)$ oder $P(|X - \mu)| \leq r\sigma)$?

5.12.2 σ - Regeln (für $\sigma > 3$)

- $r = 1 \Rightarrow P(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 0,680$
- $r = 2 \Rightarrow P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 0,955$
- $r = 3 \Rightarrow P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 0,997$
- $r = 1,96 \Rightarrow P(|X - \mu| \leq 1,96\sigma) \approx 0,95$
- $r = 2,58 \Rightarrow P(|X - \mu| \leq 2,58\sigma) \approx 0,99$

5.13 Beurteilende Statistik

5.13.1 Problem

1 Würfel, 1 Wurf
Merkmal: Augenzahl

$$P(6) = ?$$

$\downarrow$ Zufallsexperiment $\rightarrow$ Stichprobe der Länge n

$$P(6) \approx h(6)$$

(relative Häufigkeit für sehr große n)

$$\Downarrow$$

5.13.2 Zweiseitiger Signifikanztest

$X = k$ mit k =Trefferzahl; X ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p

Nullhypothese: $H_0 : p = p_0$
Gegenhypothese: $H_1 : p \neq p_0 \rightarrow p > p_0 \wedge p < p_0\}$ zweiseitiger Test

$$\downarrow$$

Stichprobe der Länge n = Bernoulli-Kette der Länge n, unter der Annahme, dass H_0 richtig ist.
$\overline{K}$: Annahmebereich von H_0
K: Ablehnungsbereich von H_0

Bei Ablehnung von H_0 spricht man von einem **signifikanten Unterschied** zwischen dem Stichprobenergebnis und H_0 ($\rightarrow$ **Signifikanztest**).

Die (maximale) Wahrscheinlichkeit, dass H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 richtig ist heißt

- **Signifikanzniveau** α
- **Irrtumswahrscheinlichkeit** α
- **Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art**

Festlegung des Signifikanzniveaus

$$\Updownarrow$$

Festlegung des Annahme- und Ablehnungsbereichs.
Methode 1 (ohne Tabelle): Festlegung von $\overline{K}$ mithilfe eines $r\sigma$-Intervalls
z.B. $\overline{K} = [\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma] \Leftrightarrow \alpha = 0.05$
oder $\overline{K} = [\mu - 2,58\sigma; \mu + 2,58\sigma] \Leftrightarrow \alpha = 0.01$

5.14 Diverse Beispiele

5.14.1 Einleitung

Hier werden einige (teils populäre) wichtige Beispiele aus der Stochastik vorgestellt.

5.14.2 Lotterie "6 aus 49"

$$\mathbb{M} = \{1, 2, ..., 49\}$$

$$\mathbb{S} = \{\{x_1, ..., x_k\} | x_i \in \mathbb{M} \text{ ohne WH }\}$$

$$\Rightarrow |\mathbb{S}| = \binom{49}{6} = \frac{49!}{43! * 6!} = 13983816$$

$$\Rightarrow P(\text{“6 Richtige”}) = \frac{1}{|\mathbb{S}|} \approx 7,15 * 10^{-8}$$

Kapitel 6

“Essentials”

6.1 Was ist das?

Die “Essentials” hab ich während Mathe immer griffbereit, dabei handelt es sich um eine kleine Sammlung wichtiger mathematischer Regeln die man mehr oder weniger gerne mit der Zeit vergisst ;)

6.2 Mittelstufenalgebra

$$y^{-x} = (\frac{1}{y})^x$$

$$\sqrt[x]{y} = y^{\frac{1}{x}}$$

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p*q}$$

$$x^n | lg() \Rightarrow n * lg(x)$$

$$x^3 = a; a < 0; \Rightarrow x = -\sqrt[3]{|a|}$$

6.3 Grenzwerte einfacher Folgen

6.4 Wichtige Ableitungen

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$f(x) = m * x \Rightarrow f'(x_0) = m$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x_0) = 4x_0^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$